PUBLICATIONS

# DU LABORATOIRE

# D'ASTRONOMIE ET DE GÉODÉSIE

## DE L'UNIVERSITÉ DE LOUVAIN

---

SECRÉTAIRE, **M. ALLIAUME**

---

**Vol. II** (nos 14 à 26)

**1925**

LOUVAIN

LIBRAIRIE UNIVERSITAIRE

UYSTPRUYST, éditeur

1926

# ONT COLLABORÉ A CE VOLUME

M. A. Biot, docteur en Sciences, ingénieur de la Société belge d'optique et d'instruments de précision (nos 15 et 20).

M. G. Lemaître, chargé de cours à la Faculté des Sciences de l'Université de Louvain (no 17).

M. É. Goedseels, professeur honoraire de l'Université de Louvain (no 24).

M. M. Alliaume, professeur à la Faculté des Sciences de l'Université de Louvain (nos 14, 16, 18, 19, 21, 22, 23, 25 et 26).

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/publications-du-laboratoire-dastronomie-et-de-geodesie_1925_2

# TABLE DES ARTICLES


14. Application de la Nomographie à la Théorie des erreurs, par M. *M. Alliaume*, p. 9.

15. Remarques sur les microsismes, par M. *A. Biot*, p. 19.

16. Le calcul des perturbations planétaires par la méthode de Lagrange, par M. *M. Alliaume*, p. 25.

17. Note on De Sitter's Universe, par M. *G. Lemaître*, p. 37.

18. Instructions pour les exercices pratiques du cours de Topographie, par M. *M. Alliaume*, p. 57.

19. Représentation géométrique simultanée des trois premières fonctions elliptiques de Jacobi, par M. *M. Alliaume*, p. 81.

20. Un objectif astronomique visuel à grande ouverture relative, par M. *A. Biot*, p. 87.

21. L'aberration des fixes et l'aberration planétaire, par M. *M. Alliaume*, p. 97.

22. Revue annuelle d'Astronomie, 1924, par M. *M. Alliaume*, p. 109.

23. La méthode des moindres carrés d'après M. É. Goedseels, par M. *M. Alliaume*, p. 145.

24. Exposé rigoureux de la méthode des moindres carrés, par M. *É. Goedseels*, p. 151.

25. La triangulation topographique, par M. *M. Alliaume*, p. 175.

26. Vues récentes sur la constitution de l'atmosphère, par M. *M. Alliaume*, p. 267.

# *Application de la Nomographie à la Théorie des erreurs ; exemple tiré des opérations géodésiques*

*par M. M. Alliaume* (1).

---

1. Une variable $y$ étant fonction d'une variable indépendante $x$, il peut arriver que des considérations théoriques fassent attribuer à cette fonction la forme linéaire :

$$y = px + q.$$

Cette équation exprime une loi dont on dit qu'elle est linéaire, et la détermination complète de cette loi exige le calcul des coefficients numériques $p$ et $q$. Ceci se fait au moyen d'une série d'expériences dans chacune desquelles on donne à $x$ une valeur arbitraire et on mesure la valeur correspondante de $y$ ; ou bien par une série d'observations dans chacune desquelles on mesure des valeurs correspondantes de $x$ et de $y$. On se met ainsi à même d'écrire un système d'autant d'équations en $(p, q)$ qu'il y a eu d'expériences ou de doubles observations, et il ne reste qu'à résoudre ce système par l'une des méthodes de la Théorie des erreurs.

Une représentation géométrique simple consiste à marquer dans une épure rapportée à des axes rectangulaires des $x$ et des $y$ les points ayant pour coordonnées le $x$ et le $y$ se correspondant dans une même expérience ou dans une même double observation. A chaque opération physique correspondra un point : si les

---

(1) Annales de la Société scientifique de Bruxelles, t. 44 (1925), p. 168, de la première partie.

erreurs d'observation (réelles et fictives) étaient nulles, tous ces points seraient en ligne droite. Il n'en est pas ainsi, et la Théorie des erreurs permettra le tracé de la droite le plus avantageux.

Dès avant l'application de la Théorie des erreurs, cette représentation graphique aura fait connaître l'allure approchée (et parfois suffisante) de la loi linéaire cherchée, et aura permis de déceler les observations grossièrement fautives.

Il arrive aussi qu'aucune considération théorique ne fait prévoir la forme de la loi par laquelle $y$ est fonction de $x$, et que la représentation graphique qui vient d'être définie distribue les points figuratifs des observations entre deux parallèles assez rapprochées pour que, eu égard à l'échelle de l'épure et à l'approximation convenue, ces points puissent être, aux erreurs d'observation près, considérés comme en ligne droite. On a alors trouvé la loi empirique de la fonction $y$, et cette loi est linéaire. C'est encore la Théorie des erreurs qui permet le calcul des valeurs les plus avantageuses des coefficients de la fonction qui exprime cette loi.

Inversement, les observations ont souvent pour objet immédiat la mesure de nombres qui se correspondent en tant que coefficients d'une même équation linéaire

$$ax + by = m$$

à laquelle satisfont, en vertu de raisons théoriques, les inconnues finales $(x, y)$. Dans une épure rapportée à des axes des $x$ et des $y$, chaque groupe d'observations est alors représenté par une droite, celle qui a pour équation l'équation linéaire dont les valeurs des coefficients résultent des observations. Si les erreurs d'observation (réelles et fictives) étaient nulles, toutes ces droites passeraient par un même point, et les coordonnées de ce point seraient les valeurs des inconnues finales. Les erreurs d'observation empêchent ces droites d'être concourantes ; néanmoins cette représentation graphique présente l'avantage de déceler les observations grossièrement fautives, et de fournir, sans calcul, des valeurs approchées des inconnues.

**2.** Ce dernier avantage se présente d'une manière sensiblement moins satisfaisante lorsque chaque groupe d'observations directes

est représenté par une droite plutôt que par un point, comme il l'était dans l'établissement des fonctions linéaires : la façon dont des points sont distribués dans le voisinage d'un même alignement s'apprécie mieux que la façon dont des droites sont proches de passer par un même point.

Pour que chaque groupe d'observations effectuées en vue de la mesure des coefficients de l'équation linéaire

$$ax + by = m$$

soit figuré par un point, et non par une droite, il suffit de faire usage des coordonnées tangentielles ; dans pareil système de coordonnées, cette équation linéaire en $(x, y)$ représente un point, et que cette équation est satisfaite par un même couple $(x, y)$ quelles que soient les observations signifie que tous les points correspondants sont en ligne droite.

Plutôt que des coordonnées tangentielles générales, on trouvera commode de faire usage des coordonnées parallèles imaginées par M. d'Ocagne qui les introduisit dans la Nomographie. Dans ce système, l'axe des $u$ et l'axe des $v$ sont deux droites dirigées, pourvues chacune d'une origine. La droite définie par les coordonnées $(u, v)$ est celle qui passe par les points ayant respectivement pour abscisses $u$ et $v$ sur ces deux axes. Lorsque $u$ et $v$ varient de manière à satisfaire à une équation linéaire, la droite qu'ils définissent se déplace en passant constamment par un même point. Cette équation linéaire est l'équation de ce point. Le point

$$au + bv = m$$

se marque facilement sur l'épure comme intersection des deux droites $(u = 0, v = m : b)$ $(u = m : a, v = 0)$.

Ainsi, toute figuration rectiligne des observations peut se ramener à une figuration ponctuelle, plus expressive.

3. D'une manière beaucoup plus générale, supposons que les équations d'observation soient de la forme

$$A\varphi(z_1, z_2) + B\psi(z_1, z_2) + C = 0 ; \qquad (1)$$

$z_1$ et $z_2$ sont les inconnues finales, tandis que les valeurs numériques de A, B, C sont, dans chaque groupe d'observations, l'objet

immédiat de ces observations : ce sont des fonctions quelconques des variables sur lesquelles portent les mesures.

A tout couple de valeurs $(z_1, z_2)$ des inconnues finales faisons correspondre un point du plan rapporté à des axes des $x$ et des $y$ en écrivant les égalités

$$\left.\begin{aligned} \varphi(z_1, z_2) &= \frac{\alpha' x + \alpha'' y + \alpha}{\gamma' x + \gamma'' y + \gamma}, \\ \psi(z_1, z_2) &= \frac{\beta' x + \beta'' y + \beta}{\gamma' x + \gamma'' y + \gamma}, \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

dans lesquelles les coefficients $\alpha'$, $\alpha''$, ... $\gamma$ ont des valeurs numériques actuellement arbitraires, pourvu que leur déterminant soit différent de zéro.

Le système (2) est équivalent aux égalités de la forme

$$\left.\begin{aligned} F_1(x, y, z_1) &= 0, \\ F_2(x, y, z_2) &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

qu'on en tire par élimination de $z_2$ puis de $z_1$, et l'équation (1) exprime la condition pour que les équations (3) soient compatibles avec l'équation (4)

$$A(\alpha' x + \alpha'' y + \alpha) + B(\beta' x + \beta'' y + \beta) + C(\gamma' x + \gamma'' y + \gamma) = 0.$$

Les équations (3) représentent deux familles de lignes cotées respectivement en $z_1$ et en $z_2$. A chaque groupe d'observations correspondront des valeurs numériques (A, B, C) et par conséquent, par l'équation (4), une droite déterminée du plan. Si les erreurs d'observation étaient nulles, l'ensemble des pareilles droites correspondant à toutes les observations passeraient par un même point, et les valeurs des inconnues finales $(z_1, z_2)$ seraient les cotes des deux lignes cotées passant par ce point, prises chacune dans une des deux familles (3). A cause des erreurs d'observation, il n'en est ainsi que moyennant une certaine approximation et cette épure ne peut que permettre d'écarter les observations grossièrement fautives et fournir des valeurs approchées des inconnues finales.

L'indétermination des neuf coefficients $\alpha'$, $\alpha''$,...$\gamma$ permet d'imposer à l'épure huit conditions simples, de manière à lui donner la configuration la plus avantageuse.

Le cas particulier le plus intéressant, et du reste extrêmement étendu dans les applications, est celui où les équations (3) sont linéaires en $x$, $y$. Ces équations représentent alors des familles de droites, et les paramètres $\alpha'$, $\alpha''$,...$\gamma$ peuvent être déterminés par la condition que deux droites, définies par leurs cotes, une dans chaque famille, occupent dans l'épure telle situation. C'est ce cas qui se prête à la transposition de l'épure en coordonnées tangentielles (parallèles de préférence), de manière qu'on ait, plutôt que des droites passant dans le voisinage d'un même point, des points quasi alignés dans le voisinage d'une même droite.

4. A tout couple de valeurs $(z_1, z_2)$ des inconnues finales, faisons correspondre une droite $(u, v)$ du plan en écrivant les égalités

$$\left.\begin{aligned} \varphi(z_1, z_2) &= \frac{\alpha' u + \alpha'' v + \alpha}{\gamma' u + \gamma'' v + \gamma}, \\ \psi(z_1, z_2) &= \frac{\beta' u + \beta'' v + \beta}{\gamma' u + \gamma'' v + \gamma}. \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Par hypothèse, l'élimination de $z_2$ puis de $z_1$ entre ces équations laisse deux équations linéaires en $u$, $v$ :

$$\left.\begin{aligned} f_1(z_1)u + g_1(z_1)v + h_1(z_1) &= 0, \\ f_2(z_2)u + g_2(z_2)v + h_2(z_2) &= 0 ; \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

et l'équation (1) exprime la condition pour que les équations (6) soient compatibles avec l'équation

$$A(\alpha' u + \alpha'' v + \alpha) + B(\beta' u + \beta'' v + \beta) + C(\gamma' u + \gamma'' v + \gamma) = 0 ; \quad (7)$$

elle est donc de la forme

$$\begin{vmatrix} A\alpha' + B\beta' + C\gamma' & f_1 & f_2 \\ A\alpha'' + B\beta'' + C\gamma'' & g_1 & g_2 \\ A\alpha + B\beta + C\gamma & h_1 & h_2 \end{vmatrix} = 0,$$

où les éléments des deux dernières colonnes s'écrivent également au moyen des paramètres indéterminés $\alpha'$, $\alpha''$,...$\gamma$.

Chacune des équations (6) représente une infinité simple de points cotés soit en $z_1$ soit en $z_2$ : ce sont les échelles des $z_1$ et des $z_2$. A chaque groupe d'observations correspondront des valeurs

numériques (A, B, C) et, par conséquent, par l'équation (7), un point déterminé de l'épure. Si les erreurs d'observation étaient nulles, l'ensemble des pareils points correspondant à toutes les observations se trouveraient en ligne droite, et les valeurs des inconnues finales seraient les cotes des points d'intersection de cette droite avec les deux échelles en $z_1$ et en $z_2$. A cause des erreurs d'observation, il n'en est ainsi que moyennant une certaine approximation ; mais l'épure permettra d'écarter les observations grossièrement fautives et donnera des valeurs approchées des inconnues finales ; dans les recherches de Physique, ces valeurs de première approximation seront souvent satisfaisantes. De plus, la distribution des points dans l'épure facilitera souvent la discussion des observations.

L'indétermination des coefficients $\alpha'$, $\alpha''$,...$\gamma$ permet d'imposer à priori la situation de (par exemple) deux points cotés dans chacune des échelles en $z_1$ et $z_2$.

Si les équations (6) sont, de plus, linéaires en $z_1$ et en $z_2$, les échelles correspondantes sont rectilignes, et le choix de deux points cotés sur chacune comporte la détermination de leurs supports.

**5.** Dans les opérations géodésiques ayant pour objet la forme et la grandeur de l'ellipsoïde terrestre de révolution par son rayon équatorial $a$ et son excentricité $\epsilon$, à chaque mesure de la longueur $s$ d'un arc de méridien dont les extrémités ont des latitudes $\varphi_1$ et $\varphi_2$ (radians), correspond l'équation

$$a(4-\epsilon^2)(\varphi_1-\varphi_2)-3a\epsilon^2\sin(\varphi_1-\varphi_2)\cos(\varphi_1+\varphi_2)-4s=0$$

à l'approximation dans laquelle $\epsilon^4$ est négligeable. Cette équation est de la forme (1) pour

$$A=\varphi_1-\varphi_2,\quad B=-3\sin(\varphi_1-\varphi_2)\cos(\varphi_1+\varphi_2),\quad C=-4s,$$
$$\varphi(a,\epsilon)=a(4-\epsilon^2),\quad \psi(a,\epsilon)=a\epsilon^2.$$

L'élimination de $\epsilon^2$, puis de $a$ entre les deux équations de correspondance

$$a(4-\epsilon^2)=\frac{\alpha'u+\alpha''v+\alpha}{\gamma'u+\gamma''v+\gamma},\qquad a\epsilon^2=\frac{\beta'u+\beta''v+\beta}{\gamma'u+\gamma''v+\gamma}$$

laisse les deux équations linéaires en $(u, v)$

$$(\alpha' + \beta' - 4\alpha\gamma')u + (\alpha'' + \beta'' - 4\alpha\gamma'')v + \alpha + \beta - 4\alpha\gamma = 0,$$
$$[\alpha'\epsilon^2 - \beta'(4 - \epsilon^2)]u + [\alpha''\epsilon^2 - \beta''(4 - \epsilon^2)]v + \alpha\epsilon^2 - \beta(4 - \epsilon^2) = 0,$$

qui sont aussi linéaires soit en $a$, soit en $\epsilon^2$, et les échelles qu'elles représentent sont rectilignes.

Il est avantageux de déterminer les paramètres $\alpha'$, $\alpha''$,... $\gamma$ :

1° de façon que ces échelles rectilignes aient pour supports respectivement l'axe des $u$ et l'axe des $v$ :

$$\alpha'' + \beta'' = 0, \qquad \gamma'' = 0, \qquad \alpha' = 0, \qquad \beta' = 0 ;$$

2° de façon que, sur ces échelles, les origines soient respectivement cotées $a_0$ et $\epsilon_0^2$, et que les cotes $a_1$, $\epsilon_1^2$ soient respectivement celles des points de ces axes ayant une même abscisse $h$ qui, avec la distance $2\delta$ des axes, fixe les dimensions de l'épure :

$$\frac{\alpha + \beta}{\gamma'} = 4\,\frac{a_0 a_1}{a_0 - a_1}\,h, \quad \frac{\gamma}{\gamma'} = \frac{h}{a_0 - a_1}, \quad \frac{\beta}{\gamma'} = \epsilon_0^2\,\frac{a_0 a_1}{a_0 - a_1}\,h,$$
$$\frac{\beta''}{\gamma'} = \frac{a_0 a_1}{a_0 - a_1}(\epsilon_1^2 - \epsilon_0^2).$$

Eu égard à ces conditions, les axes des $u$ et des $v$ sont gradués d'après les équations

$$u = \frac{a_1 h}{a_0 - a_1} \cdot \frac{a_0 - a}{a}, \qquad v = \frac{\epsilon^2 - \epsilon_0^2}{\epsilon_1^2 - \epsilon_0^2}\,h.$$

A chaque mesure $s$ d'un arc de méridien, y compris les latitudes $(\varphi_1, \varphi_2)$ de ses extrémités, correspondent des valeurs numériques de A, B, C, et, dans l'épure, le point qui, avec la notation

$$R_0 \qquad A a_0(4 - \epsilon_0^2) + B a_0 \epsilon_0^2 + C,$$

a pour équation

$$C\,\frac{a_0 - a_1}{a_0 a_1}\,u + (B - A)(\epsilon_1^2 - \epsilon_0^2)\,v + R_0 h = 0,$$

c'est-à-dire le point d'intersection des droites qui joignent les points des axes ayant pour abscisses

$$u = 0, \qquad v = -\frac{R_0}{B - A}\,\frac{h}{a_0}\,\frac{1}{\epsilon_1^2 - \epsilon_0^2}$$

et

$$v = 0, \quad u = -\frac{R_o}{C}\,\frac{a_1}{a_1 - a_o}\,\frac{h}{a_o},$$

de sorte que l'équation proposée

$$A\alpha(4 - \epsilon^2) + B\alpha\epsilon^2 + C = 0$$

est équivalente à l'équation

$$\begin{vmatrix} C\,\dfrac{a_o - a_1}{a_o a_1} & (B - A)(\epsilon_1^2 - \epsilon_o^2) & R_o h \\ 1 & 0 & -\dfrac{a_1 h}{a_o - a_1}\cdot\dfrac{a_o - a}{a} \\ 0 & 1 & -\dfrac{\epsilon^2 - \epsilon_o^2}{\epsilon_1^2 - \epsilon_o^2}\,h \end{vmatrix} = 0$$

comme on le vérifie facilement.

Les points correspondant aux divers arcs mesurés devraient être en ligne droite, et cette droite rencontrerait les deux échelles rectilignes en des points dont les cotes seraient les valeurs finales de $a$ et de $\epsilon^2$. Les erreurs d'observation écartent ces points de leur alignement théorique, et leur distribution dans l'épure permet l'examen critique des opérations géodésiques. Pareille étude graphique (ou nomographique) des mesures d'arcs de méridien effectuées jusqu'aujourd'hui est en préparation.

**6.** Dans l'équation d'observation

$$A\varphi(z_1, z_2) + \psi(z_1, z_2) + C = 0$$

écrite en vue de la détermination de deux inconnues, $z_1$ et $z_2$, les coefficients A, B, C sont nécessairement des fonctions d'au moins deux grandeurs qui doivent faire l'objet de mesures indépendantes, et ces grandeurs ne peuvent pas se ramener à moins de deux par l'introduction de variables auxiliaires qui seraient des fonctions de plusieurs d'entre elles. En particulier, C ne peut pas être nul : si C était nul, toutes les grandeurs mesurables ne compteraient que pour une dans la seule variable $\frac{A}{B}$.

Toutes les droites représentatives des observations dans la figuration ponctuelle, tous les points correspondants dans l'inter-

prétation tangentielle doivent donc constituer des ensembles d'éléments géométriques infiniment nombreux dont l'ordre est au moins deux. Toute droite du plan dans la première représentation, tout point du plan dans la deuxième doit pouvoir figurer une observation (réelle ou imaginaire).

Dans l'exemple précédent, emprunté à la Géodésie, le nombre des grandeurs mesurables est trois ; ce sont $s$, $\varphi_1$, $\varphi_2$. Chaque point de l'épure (tangentielle) représente une infinité simple d'opérations distinctes.

Envisageons le cas dans lequel A, B, C acquièrent des valeurs numériques après la mesure de deux grandeurs indépendantes $a$ et $b$. L'équation tangentielle (coordonnées parallèles)

$$(A\alpha' + B\beta' + C\gamma')\,u + (A\alpha'' + B\beta'' + C\gamma'')\,v + (A\alpha + B\beta + C\gamma) = 0$$

représente alors une infinité double de points du plan. Chacun de ces points est défini par un couple numérique $(a, b)$ et à la valeur numérique d'un seul de ces paramètres correspond un lieu de points, une ligne du plan. Celui-ci porte donc un réseau constitué de deux familles de lignes, les lignes de l'une étant susceptibles d'être cotées en $a$, les lignes de l'autre étant susceptibles d'être cotées en $b$. Ces deux familles de lignes tracées et cotées, à chaque observation $(a, b)$ correspond immédiatement, sans calcul, le point d'intersection des deux lignes cotées $a$ dans l'une et $b$ dans l'autre.

N° 15.

# *Remarques sur les microsismes*

*par M. A. Biot* (1).

—

On sait que le sol n'est jamais en repos. Les sismographes, qui enregistrent ses déplacements les plus rapides, sont toujours en mouvement. Toutefois leurs enregistrements se laissent cataloguer. Certains frémissements du sol sont dus à des tremblements de terre plus ou moins lointains. D'autres sont en relation manifeste avec la circulation, les trépidations des machines, les chocs brusques et puissants, le vent, la température,... au voisinage de la station : ces derniers frémissements sont appelés des *microsismes*. Il est toutefois encore une autre espèce de microsismes dont la cause n'est pas parmi celles énumérées ci-dessus. C'est de ces derniers qu'il est question ici.

Ces mystérieux mouvements du sol s'enregistrent partout. L'étude des enregistrements a mené aux conclusions suivantes (pour l'Europe) :

1° Les mouvements dont il est question sont *saisonniers*. A Uccle, ils n'atteignent une amplitude appréciable (de quelques dixièmes de μ à quelques μ) que d'octobre à mars ;

2° Les amplitudes des mouvements croissent parfois, en une station donnée, assez rapidement, présentent un maximum qui dure plusieurs heures ou plusieurs jours, et décroissent relativement vite. La plupart des stations de l'Europe enregistrent ces variations sensiblement en même temps.

3° Les mouvements sont remarquables par leur *grande*

(1) Annales de la Société scientifique de Bruxelles, t 44 (1925), p. 203 de la première partie.

*régularité* : les enregistrements, aux sismographes apériodiques, se présentent sous la forme de trains d'onde d'apparence sinusoïdale presque parfaite.

4° La *période* des mouvements varie entre 3,5 et 10 secondes. Toutefois les mouvements les plus remarquables ont en général une période (Uccle) comprise entre 5 et 8 secondes.

5° Le phénomène ne se présente pas sous la forme d'un front de trains d'ondes qui se propage. En un point donné arrivent à chaque instant un certain nombre d'ondes ayant sensiblement même période et qui *interfèrent* entre elles (Hecker). Il existe toutefois une vitesse générale de déplacement qui est de l'ordre de plusieurs kilomètres à la seconde, d'après l'allure des enregistrements d'un continent.

6° La période du mouvement paraît croître avec l'amplitude

La cause du phénomène a été recherchée dans diverses directions à vrai dire convergentes : toutes les hypothèses étudiées supposent une influence plus ou moins directe des dépressions atmosphériques qui passent à une certaine distance de la station d'observation.

Les uns voient dans ces microsismes les effets des *chocs* des vagues sur certaines côtes (d'Europe). En fait, quand on se borne à des statistiques, le parallélisme de la marche des deux phénomènes est assez frappant. Mais il est des cas particuliers où, par exemple, les microsismes sont très forts, l'agitation de la mer étant pratiquement nulle, et inversement : ces points ont été bien mis en évidence par M. Somville (1). Ainsi, le 8 février 1912, « le mouvement des vagues a été plutôt mesuré », et l'amplitude des microsismes a atteint, à Uccle, la valeur

---

(1) O. Somville, *Contribution à l'étude des mouvements microsismiques*. ANNALES DE L'OBSERVATOIRE ROYAL DE BELGIQUE, 1914.

Le point de vue opposé est défendu en particulier dans l'articl suivant, très complet : B. Gutenberg, *Untersuchungen über die Bodenunruhe mit Perioden von 4s-10s in Europa*. Publications du Bureau central de l'Association internationale de sismologie, Strassburg, 1921.

considérable de 3,4 μ en composante N.-S. et de 2,7 μ en composante E.-W.

Le moins, semble-t-il, que l'on puisse reprocher à cette hypothèse, c'est qu'un facteur a été négligé. Il me paraît plutôt, toutefois, qu'elle renferme une « liaison » de trop.

M. Somville, dans son article cité, a ramené la question sur un terrain plus voisin, semble-t-il, de la réalité, en montrant le parallélisme frappant qui existe entre la marche des microsismes et la valeur de la différence des pressions barométriques sur une zone de 1000 Km de rayon tracée autour de la station d'observation comme centre.

On peut toutefois ne pas s'en tenir là et rechercher le *mécanisme* qui relie les dépressions barométriques aux microsismes, d'autant plus qu'une étude très approfondie montrerait sans doute que le parallélisme signalé n'est pas absolument rigoureux : *toutes les dépressions*, semble-t-il bien, *ne sont pas actives*.

C'est ici qu'intervient notre *hypothèse de travail* :

*Les microsismes de 3,5 à 10 secondes de période sont dus, généralement, aux pressions périodiques exercées sur le fond de la mer par la houle régulière. Ces pressions sont en partie absorbées et transmises au loin sous forme d'ondes élastiques ayant sensiblement la même période que celle de la houle.*

Voici les faits qui justifient l'introduction de cette hypothèse. Je prie le lecteur de bien vouloir se reporter, pour plus de développements sur la houle, à un article de J. Renaud sur *La prévision de la houle*, dans l'Annuaire du Bureau des Longitudes pour 1920, notice A ; cet article est facilement accessible.

1° La houle est un phénomène *saisonnier*.

2° Ce phénomène est en rapport bien net, sur une côte donnée, avec *certaines* dépressions actives. D'autres sont inactives.

3° La houle est un phénomène *très régulier*.

4° La *période* moyenne du mouvement varie de 6 à 8 secondes (Bouasse, *Cours de mécanique physique*, 2e édition, p. 310).

5° Le front de la houle doit être rompu par les indentations du socle continental, de directions variables.

6° Il est naturel que la période croisse un peu avec l'amplitude (entraînement des ondes par le vent).

7° L'influence des hauts-fonds voisins de 200 m. se fait très nettement sentir sur l'allure de la houle. Ce serait sans doute déjà bien avant d'atteindre les fonds de 200 m. que la houle serait *freinée* par le fond, freinage provoquant une absorption partielle.

Comment vérifier notre hypothèse ? Il existe trop peu d'observations accessibles de la houle pour pouvoir étudier directement, actuellement, le parallélisme de la marche des deux phénomènes. Nos régions semblent d'ailleurs trop soumises aux effets directs des dépressions atmosphériques (production de vagues irrégulières) pour que l'étude en question soit facile sur nos côtes. En fait j'ai dû y renoncer.

J'ai recherché alors dans les bulletins météorologiques de la Deutsche Seewarte si pour l'hiver 1911-12 (choisi au hasard) il n'existait pas certains rapports entre la disposition des isobares *sur l'Atlantique* et les microsismes à Uccle. J'ai constaté que l'existence sur l'Atlantique d'isobares persistantes et en longues lignes parallèles était presque toujours concomitante — parfois avec une avance sensible — avec la présence de microsismes sur le continent, confirmant ainsi en l'élargissant une remarque faite par M. Somville pour les régions de la mer du Nord (dans son article cité). Or, ceci constitue un appoint sérieux en faveur de notre hypothèse. En effet, dans ces conditions, la direction du vent est sensiblement parallèle à celle des isobares. Et l'on sait que la houle est due à des vents violents soufflant assez longtemps dans la même direction. Mais il me fut impossible, au moins provisoirement, d'aller plus loin : il suffit de se reporter à l'article cité de J. Renaud pour se rendre compte que l'extrême complexité

du phénomène de l'apparition de la houle sur nos côtes ne peut se résoudre par la simple étude d'isobares tracées avec soin certainement, mais parfois avec si peu de renseignements...

Est-ce à dire que notre hypothèse soit invérifiable ? Nullement. Certaines côtes — la côte atlantique du Maroc par exemple — sont favorisées (?) par des houles absolument indépendantes de dépressions voisines. L'observation concomitante en un point d'une telle côte de la houle et des microsismes de 3.5 à 10 s. de période permettrait évidemment de résoudre la question.

Celle-ci d'ailleurs peut présenter un gros intérêt matériel à côté de son haut intérêt scientifique. Montrons-le sur un cas particulier. On sait les dégâts produits tous les ans par la houle sur la flottille marocaine souvent surprise à l'improviste : un système de prévision qui permettrait d'avertir cette flottille quelques heures à l'avance seulement lui permettrait souvent d'échapper au désastre. Or, si notre hypothèse est exacte, et en raison de la grande différence dans les vitesses de propagation des deux phénomènes, l'arrivée de la houle en un point du rivage peut être précédée de plusieurs heures par l'enregistrement en ce point des microsismes produits. Il suffit pour cela que la rampe de freinage de la houle soit suffisamment éloignée du rivage. Supposons cette rampe à 100 Km., et soit la vitesse de propagation de la houle de 50 Km. à l'heure. En raison de la très grande vitesse de propagation des microsismes, on sera prévenu à la côte de l'existence de la houle deux heures avant son arrivée.

N° 16.

# *Le calcul des perturbations planétaires par la méthode de Lagrange,*

*par M. M. Alliaume* (1).

**1.** Si R est la fonction perturbatrice et $c_1$, $c_2$, ..., $c_6$ les éléments elliptiques de la trajectoire planétaire non troublée à l'instant $t$, les équations de Lagrange sont

$$\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial c_\alpha} = \sum_\beta [c_\alpha, c_\beta] \frac{dc_\beta}{dt}, \qquad (\alpha, \beta) = 1, 2, \ldots, 6. \qquad (1)$$

La fonction perturbatrice dépend des $c_\alpha$ par l'intermédiaire des coordonnées $(x, y, z)$ de la planète. Les coefficients $[c_\alpha, c_\beta]$ ne renferment pas le temps explicitement; le déterminant de ces crochets de Lagrange est symétrique gauche.

En vertu des conditions de contact cinématique de la trajectoire képlérienne instantanée et de la trajectoire troublée, toute intégrale première des équations différentielles du mouvement non troublé est aussi intégrale première des équations différentielles du mouvement troublé. On applique ceci à l'intégrale de la force vive et aux intégrales des aires. C'est par l'intégrale de la force vive qu'on peut trouver l'expression de $\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial c_6}$ en fonction des $\frac{dc_\beta}{dt}$ en une égalité aux crochets de Lagrange, $c_6$ étant la constante cinématique du mouvement non troublé, instant (par exemple) du passage de la planète au périhélie de son orbite képlérienne instantanée. On en déduit les valeurs des coefficients $[c_6, c_\beta]$, dont on constate que tous sont nuls, sauf

---

(1) Académie royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique (*Bulletin de la Classe des Sciences*, 2e sér., t. XI [1925], p. 135).

celui où la constante cinématique est associée au grand axe de l'orbite képlérienne.

Il y a lieu de voir de plus près qu'on ne le fait d'habitude la manière dont s'utilisent les intégrales des aires,

$$y\frac{\partial z}{\partial t} - z\frac{\partial y}{\partial t} \quad \text{ou} \quad y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt} = \mathrm{A},$$

$$z\frac{\partial x}{\partial t} - x\frac{\partial z}{\partial t} \quad \text{ou} \quad z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt} = \mathrm{B},$$

$$x\frac{\partial y}{\partial t} - y\frac{\partial x}{\partial t} \quad \text{ou} \quad x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = \mathrm{C},$$

où les A, B, C, invariables dans le mouvement non troublé, s'écrivent au moyen de quatre des cinq constantes géométriques de ce mouvement.

Dans le mouvement vrai,

$$y\frac{d^2z}{dt^2} - z\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d\mathrm{A}}{dt} \quad \text{ou} \quad \sum_{\beta}\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial c_\beta}\frac{dc_\beta}{dt},$$

$$z\frac{d^2x}{dt^2} - x\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{d\mathrm{B}}{dt} \quad \text{ou} \quad \sum_{\beta}\frac{d\mathrm{B}}{dc_\beta}\frac{dc_\beta}{dt},$$

$$x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d\mathrm{C}}{dt} \quad \text{ou} \quad \sum_{\beta}\frac{\partial \mathrm{C}}{\partial c_\beta}\frac{dc_\beta}{dt}.$$

A deux équations prises parmi les trois précédentes, associons successivement l'égalité

$$\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial c_\alpha} = \frac{\partial \mathrm{R}}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial c_\alpha} + \frac{\partial \mathrm{R}}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial c_\alpha} + \frac{\partial \mathrm{R}}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial c_\alpha},$$

et de chacun des trois groupes ainsi formés éliminons deux des dérivées $\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial x}, \frac{\partial \mathrm{R}}{\partial y}, \frac{\delta \mathrm{R}}{\partial z}$, à savoir $\left(\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial y}, \frac{\partial \mathrm{R}}{\partial z}\right), \left(\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial z}, \frac{\partial \mathrm{R}}{\partial x}\right), \left(\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial x}, \frac{\partial \mathrm{R}}{\partial y}\right)$ respectivement des groupes d'équations en $\left(\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial c_\alpha}, \frac{d\mathrm{B}}{dt}, \frac{d\mathrm{C}}{dt}\right), \left(\frac{d\mathrm{A}}{dt}, \frac{\partial \mathrm{R}}{\partial c_\alpha}, \frac{d\mathrm{C}}{dt}\right), \left(\frac{d\mathrm{A}}{dt}, \frac{d\mathrm{B}}{dt}, \frac{\partial \mathrm{R}}{\partial c_\alpha}\right)$.

Ces éliminations laissent les équations

$$\left.\begin{aligned} x\frac{\partial R}{\partial c_\alpha} &= \frac{\partial y}{\partial c_\alpha}\frac{dC}{dt} - \frac{\partial z}{\partial c_\alpha}\frac{dB}{dt} + \frac{1}{2}\frac{\partial R}{\partial x}\frac{\partial r^2}{\partial c_\alpha}, \\ y\frac{\partial R}{\partial c_\alpha} &= \frac{\partial z}{\partial c_\alpha}\frac{dA}{dt} - \frac{\partial x}{\partial c_\alpha}\frac{dC}{dt} + \frac{1}{2}\frac{\partial R}{\partial y}\frac{\partial r^2}{\partial c_\alpha}, \\ z\frac{\partial R}{\partial c_\alpha} &= \frac{\partial x}{\partial c_\alpha}\frac{dB}{dt} - \frac{\partial y}{\partial c_\alpha}\frac{dA}{dt} + \frac{1}{2}\frac{\partial R}{\partial z}\frac{\partial r^2}{\partial c_\alpha}, \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

où

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

**2.** Les constantes elliptiques du mouvement non troublé seront notées de la manière suivante : $\theta$, longitude du nœud ascendant; $\varphi$, obliquité du plan de l'orbite sur le plan de l'écliptique; $\omega$, angle de position du périhélie dans le plan de l'orbite à partir du nœud ascendant; $a$, demi-grand axe de l'orbite elliptique; $e$, excentricité de cette orbite; $\tau$ (ci-dessus $c_6$), instant du passage de la planète au périhélie. Les axes coordonnés sont écliptiques héliocentriques, et A, B, C, s'écrivent au moyen de $\theta$, $\varphi$, $a$, $e$.

Le rayon vecteur $r$ est indépendant des paramètres $\theta$, $\varphi$, $\omega$, de sorte que pour $c_\alpha = \theta$, ou $\varphi$, ou $\omega$, $\frac{\partial r^2}{\partial c_\alpha} = 0$, et les équations (2) se réduisent à

$$\left.\begin{aligned} x\frac{\partial R}{\partial c_\alpha} &= \frac{\partial y}{\partial c_\alpha}\frac{dC}{dt} - \frac{\partial z}{\partial c_\alpha}\frac{dB}{dt}, \\ y\frac{\partial R}{\partial c_\alpha} &= \frac{\partial z}{\partial c_\alpha}\frac{dA}{dt} - \frac{\partial x}{\partial c_\alpha}\frac{dC}{dt}, \\ z\frac{\partial R}{\partial c_\alpha} &= \frac{\partial x}{\partial c_\alpha}\frac{dB}{dt} - \frac{\partial y}{\partial c_\alpha}\frac{dA}{dt}, \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

ou

$$\left.\begin{aligned} x\frac{\partial R}{\partial c_\alpha} &= \sum_\beta \left(\frac{\partial y}{\partial c_\alpha}\frac{\partial C}{\partial c_\beta} - \frac{\partial z}{\partial c_\alpha}\frac{\partial B}{\partial c_\beta}\right)\frac{dc_\beta}{dt}, \\ y\frac{\partial R}{\partial c_\alpha} &= \sum_\beta \left(\frac{\partial z}{\partial c_\alpha}\frac{\partial A}{\partial c_\beta} - \frac{\partial x}{\partial c}\frac{\partial C}{\partial c_\beta}\right)\frac{dc_\beta}{dt}, \\ z\frac{\partial R}{\partial c_\alpha} &= \sum_\beta \left(\frac{\partial x}{\partial c_\alpha}\frac{\partial B}{\partial c_\beta} - \frac{\partial y}{\partial c_\alpha}\frac{\partial A}{\partial c_\beta}\right)\frac{dc_\beta}{dt}. \end{aligned}\right\} \quad c_\alpha = \theta, \varphi, \omega. \qquad (3')$$

Ces équations expriment les $\frac{\partial R}{\partial c_\alpha}$ $(c_\alpha = \theta, \varphi, \omega)$ en fonction des $\frac{dc_\beta}{dt}$ qui entrent dans $\frac{dA}{dt}, \frac{dB}{dt}, \frac{dC}{dt}$, à savoir $\frac{d\theta}{dt}, \frac{d\varphi}{dt}, \frac{da}{dt}, \frac{de}{dt}$. Ce sont des équations de la forme (1), des équations aux crochets de Lagrange si les coefficients

$$\left(\frac{\partial y}{\partial c_\alpha}\frac{\partial C}{\partial c_\beta} - \frac{\partial z}{\partial c_\alpha}\frac{\partial B}{\partial c_\beta}\right) : x,$$
$$\left(\frac{\partial z}{\partial c_\alpha}\frac{\partial A}{\partial c_\beta} - \frac{\partial x}{\partial c_\alpha}\frac{\partial C}{\partial c_\beta}\right) : y,$$
$$\left(\frac{\partial x}{\partial c_\alpha}\frac{\partial B}{\partial c_\beta} - \frac{\partial y}{\partial c_\alpha}\frac{\partial A}{\partial c_\beta}\right) : z$$

sont constants dans le mouvement non troublé, ou, eu égard à ce que $(x, y, z)$ sont proportionnels à $r$, si

$$\frac{\partial C}{\partial c_\beta}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial y}{\partial c_\alpha} : x\right) - \frac{\partial B}{\partial c_\beta}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial z}{\partial c_\alpha} : x\right) = 0,$$
$$\frac{\partial A}{\partial c_\beta}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial z}{\partial c_\alpha} : y\right) - \frac{\partial C}{\partial c_\beta}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial x}{\partial c_\alpha} : y\right) = 0,$$
$$\frac{\partial B}{\partial c_\beta}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial x}{\partial c_\alpha} : z\right) - \frac{\partial A}{\partial c_\beta}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial y}{\partial c_\alpha} : z\right) = 0,$$

$v$ étant l'angle de position de la planète à l'instant $t$, dans le plan de l'orbite instantanée, à partir du nœud ascendant de celle-ci.

Or,

$$x = r\cos\theta\cos v - r\sin\theta\cos\varphi\sin v,$$
$$y = r\sin\theta\cos v + r\cos\theta\cos\varphi\sin v,$$
$$z = r\sin\varphi\sin v,$$

et

$$A = h\sin\theta\sin\varphi,$$
$$B = -h\cos\theta\sin\varphi,$$
$$C = h\cos\varphi,$$

où $h = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$, constante des aires, vaut $\sqrt{\mu a(1-e^2)}$, avec $\mu$ pour représenter le produit du coefficient d'attraction

newtonnienne par la somme des masses du Soleil et de la planète.

Les conditions ci-dessus montrent que les deux premières égalités (3′) sont des équations aux crochets de Lagrange pour $c_\alpha = \theta$; d'où

$$[\theta, c_\beta] = \left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\frac{\partial C}{\partial c_\beta} - \frac{\partial z}{\partial \theta}\frac{\partial B}{\partial c_\beta}\right) : x,$$

ou bien

$$[\theta, c_\beta] = \left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\frac{\partial A}{\partial c_\beta} - \frac{\partial x}{\partial \theta}\frac{\partial C}{\partial c_\beta}\right) : y,$$

c'est-à-dire

$$[\theta, c_\beta] = \frac{\partial C}{\partial c_\beta}, \qquad c_\beta = \theta, \varphi, a, e,$$

et, nécessairement,

$$[\theta, \omega] = 0, \qquad [\theta, \tau] = 0.$$

De même, la troisième équation (3′) est une équation aux crochets de Lagrange pour $c_\alpha = \varphi$ :

$$[\varphi, c_\beta] = \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\frac{\partial B}{\partial c_\beta} - \frac{\partial y}{\partial \varphi}\frac{\partial A}{\partial c_\beta}\right) : z;$$

c'est-à-dire

$$[\varphi, c_\beta] = \sin\theta \frac{\partial B}{\partial c_\beta} - \cos\theta \frac{\partial A}{\partial c_\beta}, \qquad \beta = \theta, \varphi, a, e,$$

avec

$$[\varphi, \omega] = 0, \qquad [\varphi, \tau] = 0.$$

Enfin, aucune des équations (3′) n'est une équation aux crochets de Lagrange pour $c_\alpha = \omega$.

**3.** Eu égard à ce que

$$\frac{\partial x}{\partial t} = -\frac{\partial x}{\partial \tau}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial r}{\partial t} = -\frac{\partial r}{\partial \tau},$$

l'addition membre à membre des équations (3), multipliées respectivement par $\frac{\partial x}{\partial t}$, $\frac{\partial y}{\partial t}$, $\frac{\partial z}{\partial t}$, donne

$$\frac{1}{2}\frac{\partial r^2}{\partial \tau}\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial c_\alpha} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \tau} & \frac{\partial x}{\partial c_\alpha} & \frac{d\mathrm{A}}{dt} \\ \frac{\partial y}{\partial \tau} & \frac{\partial y}{\partial c_\alpha} & \frac{d\mathrm{B}}{dt} \\ \frac{\partial z}{\partial \tau} & \frac{\partial z}{\partial c_\alpha} & \frac{d\mathrm{C}}{dt} \end{vmatrix}$$

ou bien, $u$ étant l'anomalie excentrique de la planète non troublée à l'instant $t$,

$$r^2\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial c_\alpha} = \begin{vmatrix} x & \frac{\partial x}{\partial c_\alpha} & \frac{d\mathrm{A}}{dt} \\ y & \frac{\partial y}{\partial c_\alpha} & \frac{d\mathrm{B}}{dt} \\ z & \frac{\partial z}{\partial c_\alpha} & \frac{d\mathrm{C}}{dt} \end{vmatrix} + \frac{\partial v}{\partial u}\frac{\partial r}{\partial u} \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial c_\alpha} & \frac{d\mathrm{A}}{dt} \\ \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial c_\alpha} & \frac{d\mathrm{B}}{dt} \\ \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial c_\alpha} & \frac{d\mathrm{C}}{dt} \end{vmatrix},$$

égalité valable pour $c_\alpha = \theta, \varphi, \omega$.

En particulier, pour $c_\alpha = \omega$, $\frac{\partial x}{\partial \omega} = \frac{\partial x}{\partial v}$, ... et le deuxième déterminant s'annule; dans ce cas

$$2r^2\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial \omega}\frac{\partial v}{\partial \tau} = -\frac{dh^2}{dt},$$

ou

$$a^2\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial \omega} = \sqrt{\mu a}\frac{\partial h}{\partial a}\frac{da}{dt} + \sqrt{\mu a}\frac{\partial h}{\partial e}\frac{de}{dt}.$$

C'est une équation aux crochets de Lagrange; elle fournit $[\omega, a]$ et $[\omega, e]$ et montre que

$$[\omega, \theta] = 0, \qquad [\omega, \varphi] = 0.$$

**4.** Pour $c_\alpha = (a, e, \tau)$, les équations (2) sont valables, mais non de la forme (1) et impropres au calcul des crochets correspondants, parmi lesquels, en valeur absolue, un seul, $[a, e] = -[e, a]$, est encore inconnu.

Il en est de même de l'équation obtenue en additionnant membre à membre les équations (2) multipliées respectivement par $\frac{\partial x}{\partial t}, \frac{\partial y}{\partial t}, \frac{\partial z}{\partial t}$. Cette équation est

$$\frac{\partial r^2}{\partial t}\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial c_\alpha} - \frac{\partial r^2}{\partial c_\alpha}\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial t} = 2\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial x}{\partial c_\alpha} & \frac{d\mathrm{A}}{dt} \\ \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial c_\alpha} & \frac{d\mathrm{B}}{dt} \\ \frac{\partial z}{\partial t} & \frac{\partial z}{\partial c_\alpha} & \frac{d\mathrm{C}}{dt} \end{vmatrix}$$

qui, pour $c_\alpha = (a, e, \tau)$, se transforme dans

$$2r^2\left(\frac{\partial r}{\partial \tau}\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial c_\alpha} - \frac{\partial r}{\partial c_\alpha}\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial \tau}\right)\frac{\partial v}{\partial \tau} = \left(\frac{\partial v}{\partial \tau}\frac{\partial r}{\partial c_\alpha} - \frac{\partial v}{\partial c_\alpha}\frac{\partial r}{\partial \tau}\right)\frac{dh^2}{dt}.$$

Pour $c_\alpha = \tau$, cette égalité se réduit à une identité.

**5.** La nécessité, généralement admise, d'effectuer le calcul direct du coefficient $[a, e]$ d'après le développement qui le définit,

$$\mathop{\mathrm{S}}_{x,y,z}\left(\frac{\partial x}{\partial c_\alpha}\frac{\partial x'}{\partial c_\beta} - \frac{\partial x}{\partial c_\beta}\frac{\partial x'}{\partial c_\alpha}\right), \qquad x' = \frac{dx}{dt}, \ldots$$

est fort désagréable. Il y a lieu de démontrer *a priori* que

$$[a, e] = 0.$$

Résolues par rapport aux $\frac{dc_\alpha}{dt}$, les équations (1) aux crochets de Lagrange prennent la forme

$$\frac{dc_\alpha}{dt} = \sum_\beta (c_\alpha, c_\beta)\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial c_\beta}, \qquad (\alpha, \beta) = 1, 2, \ldots, 6, \qquad (4)$$

où les coefficients $(c_\alpha, c_\beta)$, parenthèses de Poisson, associations algébriques des $[c_\alpha, c_\beta]$, ne renferment pas non plus le temps explicitement. De plus, $(c_\alpha, c_\alpha) = 0$ et $(c_\beta, c_\alpha) + (c_\alpha, c_\beta) = 0$.

Reprenons les expressions des $\frac{\partial R}{\partial c_\alpha}$, sous la forme (1), en n'écrivant pas les termes dont nous savons que le coefficient est nul :

$$\frac{\partial R}{\partial \theta} = [\theta, \varphi]\frac{d\varphi}{dt} + [\theta, a]\frac{da}{dt} + [\theta, e]\frac{de}{dt},$$

$$\frac{\partial R}{\partial \varphi} = [\varphi, \theta]\frac{d\theta}{dt},$$

$$\frac{\partial R}{\partial \omega} = [\omega, a]\frac{da}{dt} + [\omega, e]\frac{de}{dt},$$

$$\frac{\partial R}{\partial a} = [a, \theta]\frac{d\theta}{dt} + [a, \omega]\frac{d\omega}{dt} + [a, e]\frac{de}{dt} + [a, \tau]\frac{d\tau}{dt},$$

$$\frac{\partial R}{\partial e} = [e, \theta]\frac{d\theta}{dt} + [e, \omega]\frac{d\omega}{dt} + [e, a]\frac{da}{dt},$$

$$\frac{\partial R}{\partial \tau} = [\tau, a]\frac{da}{dt}$$

La résolution de ce système par rapport aux $\frac{dc_\alpha}{dt}$ donne les égalités de la forme (4)

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{[\varphi, \theta]}\frac{\partial R}{\partial \varphi},$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{[\theta, \varphi]}\frac{\partial R}{\partial \theta} - \frac{[\theta, e]}{[\theta, \varphi][\omega, e]}\frac{\partial R}{\partial \omega} - \frac{[\theta, a][\omega, e] - [\theta, e][\omega, a]}{[\theta, \varphi][\omega, e][\tau, a]}\frac{\partial R}{\partial \tau},$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{[e, \omega]}\frac{\partial R}{\partial e} - \frac{[e, \theta]}{[e, \omega][\varphi, \theta]}\frac{\partial R}{\partial \varphi} - \frac{[e, a]}{[e, \omega][\tau, a]}\frac{\partial R}{\partial \tau},$$

$$\frac{da}{dt} = \frac{1}{[\tau, a]}\frac{\partial R}{\partial \tau},$$

$$\frac{de}{dt} = \frac{1}{[\omega, e]}\frac{\partial R}{\partial \omega} - \frac{[\omega, a]}{[\omega, e][\tau, a]}\frac{\partial R}{\partial \tau},$$

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{[a, \tau]}\frac{\partial R}{\partial a} - \frac{[a, \theta][e, \omega] - [a, \omega][e, \theta]}{[a, \tau][\varphi, \theta][e, \omega]}\frac{\partial R}{\partial \varphi} - \frac{[a, \omega]}{[a, \tau][e, \omega]}\frac{\partial R}{\partial e} - \frac{[a, e]}{[a, \tau][\omega, e]}\frac{\partial R}{\partial \omega}.$$

Écrire l'une des égalités

$$\frac{\partial R}{\partial c_\beta} \quad \text{ou} \quad \frac{\partial R}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial c_\beta} + \frac{\partial R}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial c_\beta} + \frac{\partial R}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial c_\beta} = 0$$

équivaut à admettre que la force perturbatrice appartient à chaque instant au plan passant par la planète et perpendiculaire au déplacement infiniment petit que subirait celle-ci à partir de sa position à cet instant, si l'on donnait une variation infiniment petite au seul élément $c_\beta$ de l'orbite elliptique instantanée correspondante.

$\frac{\partial R}{\partial \theta} = 0$ exprime que la force perturbatrice est dans un même plan avec la normale au plan de l'écliptique menée par le centre du soleil; $\frac{\partial R}{\partial \varphi} = 0$, qu'elle appartient au plan de l'orbite képlérienne instantanée; $\frac{\partial R}{\partial \omega} = 0$, qu'elle est dans un même plan avec la normale au plan de cette orbite menée par le centre du Soleil; $\frac{\partial R}{\partial \tau} = 0$, qu'elle appartient au plan normal à la trajectoire képlérienne instantanée; $\frac{\partial R}{\partial a} = 0$ ou $\frac{\partial R}{\partial e} = 0$, qu'elle appartient à l'un ou l'autre de deux plans distincts perpendiculaires au plan de l'orbite non troublée, et différents du plan normal à cette orbite.

Deux ce ces conditions peuvent être écrites simultanément et leur ensemble définit à chaque instant la direction de la force perturbatrice; $\frac{\partial R}{\partial \varphi} = 0$ et $\frac{\partial R}{\partial \tau} = 0$ expriment que la force perturbatrice est dirigée comme la normale (principale) à l'orbite (plane) instantanée.

Trois de ces conditions, ou davantage, ne peuvent être écrites simultanément que lorsque les plans correspondants se coupent suivant une même droite; $\frac{\partial R}{\partial \theta} = 0$, $\frac{\partial R}{\partial \varphi} = 0$, $\frac{\partial R}{\partial \omega} = 0$ sont compatibles pour exprimer que la force perturbatrice passe constamment par le centre du Soleil.

Or, il est toujours possible de concevoir une force perturbatrice dirigée à chaque instant, de façon que l'un quelconque des éléments elliptiques soit invariable, et le second membre de

chacune des équations (4) ne peut renfermer que des $\frac{\partial R}{\partial c\beta}$ susceptibles d'être nuls simultanément.

Les conditions $\frac{\partial R}{\partial \theta} = 0$ et $\frac{\partial R}{\partial \varphi} = 0$ expriment que la force perturbatrice passe constamment par le centre du Soleil et sont généralement incompatibles avec $\frac{\partial R}{\partial \tau} = 0$. Aussi, eu égard à l'expression ci-dessus de $\frac{d\varphi}{dt}$, la différence

$$[\theta, a][\omega, e] - [\theta, e][\omega, a]$$

doit-elle être identiquement nulle. Ce résultat fait disparaître $\frac{\partial R}{\partial \varphi}$ de l'expression de $\frac{d\tau}{dt}$.

De même, les conditions $\frac{\partial R}{\partial \varphi} = 0$ et $\frac{\partial R}{\partial \tau} = 0$ sont généralement incompatibles avec $\frac{\partial R}{\partial \omega}$, et, eu égard à l'expression ci-dessus de $\frac{d\omega}{dt}$, on doit avoir

$$(\omega, \tau) \quad \text{ou} \quad \frac{[a, e]}{[e, \omega][\tau, a]} = 0,$$

de sorte que $[a, e] = 0$. Cette conclusion réduit aussi d'un terme l'expression de $\frac{d\tau}{dt}$.

---

Marcel Hayez, imprimeur, rue de Louvain, 112, Bruxelles.

# NOTE ON DE SITTER'S UNIVERSE

By G. Lemaitre[1]

The equations of the element of interval of a four-dimensional universe of constant positive curvature have been given by de Sitter in the form

$$ds^2 = R^2[-d\chi^2 - \sin^2\chi(d\Theta^2 + \sin^2\Theta d\phi^2) + \cos^2\chi d\tau^2], \qquad (1)$$

where $R$ is a constant called the radius of the four-dimensional universe and $\chi$, $\Theta$, $\phi$, $\tau$ are coördinates. When the division of time and space is made as suggested by these coördinates, the space is itself of constant curvature and has the same radius as the universe.

In the four-dimensional universe, every point is equivalent to any other and the choice of any origin is immaterial. In the above separation of space and time, this symmetry is broken. The lines of constant coördinates $\chi$, $\Theta$, $\phi$, which are considered as the direction of the time, are not geodesics with the exception of the one $\chi = 0$, which passes through the origin. This point has now properties different from any other; it is a *center*. Free points or rays of light describe geodesics of the universe and do not move along geodesics of the space, with the exception of those which pass through the center.

It is clear that such an introduction of an apparent center in a universe which, by definition, has none is objectionable for a study of the properties of this universe. The purpose of this note is to look for a separation of space and time which is free from this objection. We shall be led to a homogenous field, non-statical and euclidean.

A homogenous division of space and time is immediately found by writing

$$ds^2 = R^2\{-\cosh^2\tau'[d\chi'^2 + \sin^2\chi'(d\Theta'^2 + \sin^2\Theta' d\phi'^2)] + d\tau'^2\} \qquad (2)$$

With the division of time and space suggested by these coördinates, the radius of space is constant at any place, but is variable with time. It is proportional to $\cosh\tau'$.

[1]Fellow C. R. B. Educational Foundation, University of Louvain, at the Massachusetts Institute of Technology, Dept. of Physics.

Reprinted from *Journal of Mathematics and Physics*, Vol. IV, No. 3, May, 1925.

The fact that the field is no more static may be urged as an objection against the significance of de Sitter's solution, but not against the way we have divided space and time to interpret it. There is, however, a serious objection against this procedure: The origin of time becomes a time absolutely distinct from every other. At the instant $\tau' = 0$, all the geodesics of the space are geodesics of the universe; at any other instant $\tau'$, there is no geodesic of the space which is a geodesic of the universe. The central point in space is removed, but now a central time has been introduced.

We shall see at once that the interval of the field may be written

$$ds^2 = R^2 \frac{-dx^2 - dy^2 - dz^2 + dt^2}{t^2} \tag{3}$$

When we separate time from space as suggested by these coördinates, *i.e.*, along the lines of constant $x$, $y$, $z$, we see that the geometry is euclidean. The time is now proportional to $T = \pm \int dt/t = \pm ln\ t$, and $t = 0$ represents the infinite past or future. For $t = \infty$, the distances of the points of constant $dx$, $dy$, $dz$ tend to zero; the geodesics are asymptotic, *i.e.*, parallel, to the future or from the past. The equation of the field may also be written

$$ds^2 = R^2[-e^{-2T}(dx^2 + dy^2 + dz^2) + dT^2] \tag{4}$$

for geodesics parallel to the future, or

$$ds^2 = R^2[-e^{2T}(dx^2 + dy^2 + dz^2) + dT^2] \tag{5}$$

if parallel in the past direction.

This choice of coördinates is free from the objection of introducing a spurious assymmetry in space and time.

Before using this solution to discuss the properties of de Sitter's universe, we shall first establish the validity of Equation (3).

Using the transformation

$$\begin{cases} r = e^{\tau} \tan \chi \\ t = e^{\tau} \sec \chi \end{cases} \tag{6}$$

or

$$\begin{cases} \chi = \arcsin r/t \\ \tau = 1/2\ ln(t^2 - r^2), \end{cases} \tag{7}$$

the original expression (1) of de Sitter becomes

$$\frac{1}{R^2}ds^2 = -\frac{1}{1-r^2/t^2}\,\frac{(t\,dr - r\,dt)^2}{t^4} - \frac{r^2}{t^2}(d\Theta^2 - \sin^2\Theta d\phi^2) - \left(1-\frac{r^2}{t^2}\right)\frac{(t\,dt - r\,dr)^2}{(t^2-r^2)^2}$$

or

$$ds^2 = \frac{R^2}{t^2}\left[-dr^2 - r^2\,d\Theta^2 - r^2\sin^2\Theta d\phi^2 + dt^2\right]. \tag{8}$$

The expression inside the brackets is a Galilean $ds^2$ written in polar coördinates. By transforming to Cartesian coördinates, we get (3).

The equation is convenient for discussion, as we can easily get a representation of de Sitter's universe in a Galilean universe of Cartesian coördinates $x$, $y$, $z$. The lines parallel to the $t$-axis ($x$, $y$, $z$=Const.) are obviously geodesics. The rays of light are represented by the rays of light of the Galilean field (straight lines at 45° to the plane $t=0$).

The other geodesics are easily found. If $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$, are the derivatives with respect to $t$, we must have

$$\delta\int\sqrt{1-\dot{x}^2-\dot{y}^2-\dot{z}^2}\;\frac{dt}{t} = 0.$$

Euler's equations are

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{x}}{t\sqrt{1-\dot{x}^2-\dot{y}^2-\dot{z}^2}}\right) = 0$$

and similarly in $y$ and $z$. Integrating,

$$\frac{\dot{x}}{\alpha t} = \frac{\dot{y}}{\beta t} = \frac{\dot{z}}{\gamma t} = \sqrt{1-\dot{x}^2-\dot{y}^2-\dot{z}^2} = \frac{1}{\sqrt{1+(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)t^2}}$$

where $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ are integration constants, real for time-like lines, imaginary for space-like ones. Writing $C=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$ and integrating

$$\frac{x-a}{\alpha} = \frac{y-b}{\beta} = \frac{z-c}{\gamma} = \frac{1}{C}\sqrt{1+Ct^2}$$

where $a$, $b$, $c$ are integration constants and therefore,

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2-t^2 = 1/C.$$

The geodesics are equilateral hyperbolae lying in planes perpendicular to the plane $t=0$ and having an axis in this plane.

Their asymptotes are rays of light.

De Sitter separated time from space along the lines of constant $\chi$, $\Theta$, $\phi$. From (7) these lines are now represented by a pencil of straight lines passing through the point $r=0$, $t=0$. These lines are n t geodesics except the central one $r=0$, $\chi=0$ and the lines $r=t$, $\chi=\pi/2$ which are rays of light.

This explains the paradoxical singularity which occurs for this value of $\chi$.

The Doppler-Fizeau effect is easy to calculate. Let us consider two sources of light of same proper period $ds$. They are supposed to describe geodesics of constant, $x$, $y$, $z$, then

$$\frac{1}{R}ds=\frac{dt}{t}=\frac{dt_0}{t_0}.$$

The equation of the ray of light from $M$ to $M_0$ is

$$t_0=t+r;$$

for two rays, we have

$$t_0'-t_0=t'-t$$

so that the periods, as observed by an observer in $M_0$, are $dt_0$ and $dt$. The Doppler effect will be

$$\frac{d\lambda}{\lambda}=\frac{dt}{dt_0}-1=\frac{t}{t_0}-1=\frac{-r}{t_0}.$$

If we introduce de Sitter's coördinates, taking as center the light-source $M$, the observer $M_0$ will be at a distance

$$\sin\chi=\frac{r}{t_0};$$

we shall have,

$$\frac{d\lambda}{\lambda}=-\frac{r}{t_0}=-\sin\chi. \tag{9}$$

This expression has been given by Silberstein. He supposes the light-source at the origin. The observer describes a geodesic which neither goes through the origin, nor passes at a minimum

distance from it, but is at the intermediate case. Introducing this condition in a general expression of the Doppler effect, he finds the above formula.

In the preceding reasoning, we have supposed $t=0$ in the past so that our lines of universe converge in the future. If we reverse the sign of $t$ and suppose that our lines are parallel in the direction of the past, we find the same value with the opposite sign. These two solutions cannot be compounded without introducing an assymmetry of the kind we are just criticizing.

We may sum up the above discussion in the following way: de Sitter's coördinates introduced a spurious inhomogeneity of the field which is not simply the mathematical appearance of center of an origin of coördinates, but really attributes distinct absolute properties to a center.

We tried to remove the difficulty by introducing other coördinates and were led to a homogeneous field; but first the field is not static and secondly, the space has no curvature. The first point may probably be accepted. Eddington writes on this subject: "It is sometimes urged against de Sitter's world that it becomes non-statical as soon as any matter is inserted in it. But this property is perhaps rather in favor of de Sitter's theory than against it."[2] Our treatment evidences this non-statical character of de Sitter's world which gives a possible interpretation of the mean receding motion of spiral nebulae.

The second point, on the contrary, seems completely inadmissible. We are led back to the euclidean space and to the impossibility of filling up an infinite space with matter which cannot but be finite. De Sitter's solution has to be abandoned, not because it is non-static, but because it does not give a finite space without introducing an impossible boundary.

[2]Eddington. The Mathematical Theory of Relativity, p. 161, Cambridge, 1923.

March, 1925.

N° 18.

# *Instructions pour les Exercices pratiques du Cours de Topographie* (1)

## *TRIANGULATION*

### *Axes du lever*

**Axes topographiques d'un lever dans les environs de Louvain.** — Le plan des $xy$ ($z = 0$) est le plan horizontal correspondant à la surface de repère adoptée lors du nivellement général du pays. L'axe des $x$ appartient au méridien de 0,36 gr. *est* par rapport à Bruxelles (ancien observatoire) et est dirigé positivement vers le *nord*. L'axe des $y$ appartient au parallèle de 56,54 gr. *nord* et est dirigé positivement vers l'*ouest*. D'après ces définitions, la verticale de l'origine passe quelques mètres au sud de la rue des Brasseurs, entre la Demi-rue et la rue Coutereel.

Le *raccordement en altitude* s'effectue à partir de l'un des repères de l'État-major des environs du terrain ; par exemple :

*Louvain*, seuil de la porte centrale de l'ancien pavillon de l'octroi, à la porte de Bruxelles, côté sud de la route 44,89.

Le *raccordement planimétrique* consiste dans deux applications du problème de Pothenot ou une application du problème de Hansen, après observations de trois ou de deux points dont les coordonnées topographiques sont connues ; par exemple, de deux points du rempart de Malines, visées sur Louvain (église S$^t$ Pierre), Louvain (église S$^{te}$ Gertrude), Héverlé (abbaye de Parc), Kessel-Loo (abbaye de Vlierbeek).

**Coordonnées des points géodésiques.** — Les publications de l'Institut cartographique militaire (1881) fournissent la longitude $\lambda$ et la latitude $\varphi$ des points géodésiques, som-

(1) Une première partie, relative au *Nivellement*, n'est pas reproduite ici.

| | POINTS | λ | φ | $x$ | $y$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Aerschot (tour) . . . . . | — 0,5144 99 | 56,6510 67 | + 11 106,7 | — 9 746,8 |
| 2 | Anvers (fl. cathédrale) . . . | — 0,0351 61 | 56,9125 36 | + 37 253,6 | + 20 492,9 |
| 3 | Berthem (clocher) . . . . | — 0,2883 50 | 56,5130 00 | — 2 700,0 | + 4 520,2 |
| 4 | Blanden (cl.) . . . . . | — 0,3877 65 | 56,4760 65 | — 6 393,5 | — 1 751,6 |
| 5 | Bueken (cl.) . . . . . | — 0,2764 85 | 56,5977 15 | + 5 771,5 | + 5 268,7 |
| 6 | Campenhout (cl.) . . . . . | — 0,2001 95 | 56,6027 90 | + 6 279,0 | + 10 081,5 |
| 7 | Corbeek-Loo (cl. neuf) . . . | — 0,4436 00 | 56,5134 65 | — 2 653,5 | — 5 274,0 |
| 8 | Corbeek-Loo (château) . . . | — 0,4451 05 | 56,5229 10 | | |
| 9 | Cortenberg (cl.) . . . . . | — 0,1921 45 | 56,5407 45 | + 74,5 | + 10 589,4 |
| 10 | Erps-Querbs (cl. Erps) . . . | — 0,2098 85 | 56,5605 10 | + 2 051,0 | + 9 470,2 |
| 11 | Erps-Querbs (cl. Querbs) . . | — 0,2224 10 | 56,5619 65 | + 2 196,5 | + 8 680,1 |
| 12 | Everberg (cl.) . . . . . | — 0,2239 30 | 56,5325 10 | | |
| 13 | Haecht (tour) . . . . . | — 0,2988 78 | 56,6421 04 | + 10 210,4 | + 3 856,6 |
| 14 | Hérent (cl.) . . . . . | — 0,3387 95 | 56,5644 05 | + 2 440,5 | + 1 337,8 |
| 15 | Héverlé (cl.) . . . . . | — 0,3597 20 | 56,5165 80 | | |

| | POINTS | λ | φ | $x$ | $y$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 16 | Héverlé (cl. abb. Park) . . . | — 0,3871 35 | 56,5173 10 | — 2 269,0 | — 1 711,9 |
| 17 | Kessel-Loo (cl. abb. Vlierbeek) | — 0,4085 55 | 56,5472 75 | + 727,5 | — 3 063,2 |
| 18 | Leefdaal (cl.) . . . . . | — 0,2465 00 | 56,4985 20 | — 4 148,0 | + 7 160,0 |
| 19 | Louvain (fl. St-Pierre) . . . | — 0,3693 20 | 56,5336 25 | — 637,5 | — 588,0 |
| 20 | Louvain (cl. Ste-Gertrude) . . | — 0,3666 75 | 56,5387 55 | — 124,5 | — 421,1 |
| 21 | Malines (tour cath.) . . . . | — 0,1214 70 | 56,6995 37 | + 15 953,7 | + 15 048,0 |
| 22 | Pellenberg (cl.) . . . . . | — 0,4721 49 | 56,5234 76 | — 1 652,4 | — 7 075,1 |
| 23 | Rotselaer (cl.) . . . . . | — 0,3780 80 | 56,6135 45 | + 7 354,5 | — 1 140,6 |
| 24 | Thildonck (cl.) . . . . . | — 0,3050 75 | 56,6060 85 | + 6 608,5 | + 3 465,0 |
| 25 | Velthem (cl.) . . . . . | — 0,2837 55 | 56,5578 95 | + 1 789,5 | + 4 810,0 |
| 26 | Werchter (cl.) . . . . . | — 0,3608 60 | 56,6362 90 | + 9 529,0 | — 54,3 |
| 27 | Wesemael (cl.) . . . . . | — 0,4299 50 | 56,6093 00 | + 6 930,0 | — 4 413,0 |
| 28 | Wspelaer (cl.) . . . . . | — 0,2938 60 | 56,6223 15 | + 8 231,5 | + 4 172,5 |
| 29 | Winxele (cl.) . . . . . | — 0,3053 70 | 56,5543 00 | + 1 430,0 | + 3 446,4 |

mets des triangulations des divers ordres ; l'unité est le grade ; les longitudes sont comptées à partir du méridien de Bruxelles (ancien observatoire), positivement vers l'*ouest*.

Passage des coordonnées géographiques ($\lambda$, $\varphi$) aux coordonnées topographiques ($x$, $y$, en mètres) :

$$x = (\varphi - 56{,}54) \times \frac{2\pi R}{400}$$

$$y = (\lambda + 0{,}36) \times \frac{2\pi R}{400} \cos 56{,}54$$

où R est, en mètres, le rayon de la Terre supposée sphérique et telle que

$$2\pi R = 40\,000\,000$$

approximation à laquelle

$$x = 100\,000\ (\varphi - 56{,}54),$$
$$y = \ 63\,086{,}5\ (\lambda + 0{,}36).$$

## Coordonnées géographiques et topographiques

LOUVAIN ET SES ENVIRONS

*Remarque générale.* — Dans chaque programme de lever, il y a lieu de se rendre compte de l'approximation des formules ci-dessus pour le calcul des coordonnées ($x$, $y$) ; par exemple, Aerschot, Malines et surtout Anvers sont trop éloignés de l'axe des $z$ pour que leurs coordonnées ($x$, $y$) puissent être employées autrement que dans un lever de précision médiocre et en vue d'un plan à petite échelle

*Remarques particulières.* — *Point* 1. La tour de l'église d'Aerschot s'aperçoit de la butte du rempart de Malines la plus voisine du Mont-César.

2. La cathédrale d'Anvers est visible de la Montagne de fer, colline parallèle au rempart de Malines (altitude 70 à 88m.).

8, 12. Les coordonnées de Corbeek-Loo (château) et d'Everberg (clocher) sont suspectes.

14. L'église actuelle d'Héverlé n'a pas été bâtie au même endroit que celle dont le clocher a servi de point géodésique.

18. Le point défini par ces coordonnées est l'axe du dôme incendié en 1914 ; l'axe de la flèche centrale actuelle appartient à la même verticale.

20. La cathédrale de Malines s'aperçoit de la Montagne de fer.

Anvers et Malines sont des sommets de la triangulation du premier ordre ; Aerschot, Haecht et Pellenberg des sommets de la triangulation du deuxième ordre ; les autres points appartiennent à la triangulation du troisième ordre.

---

## *Théodolite*

### Installation et réglage

*Instruments.* — Un théodolite avec ses accessoires : sur chaque cercle du théodolite, un vernier a été choisi et repéré comme vernier principal ; — un trépied à translation ; — un jalon.

*Réglage du niveau à pivot.* — 1) Réglage provisoire : *a)* orienter le niveau parallèlement à deux vis calantes, et agir simultanément sur celles-ci, dans des sens inverses, de manière à amener la bulle entre ses repères ; *b)* faire tourner le niveau de 180° ; *c)* corriger de moitié le déplacement de la bulle en agissant sur le dipositif de réglage.

2) Emploi du niveau réglé : *a)* orienter le niveau dans la direction de deux vis, et agir sur celles-ci de manière à amener la bulle entre ses repères ; *b)* placer le niveau dans la direction perpendiculaire et amener la bulle entre ses repères en agissant sur la troisième vis ; *c)* recommencer.

3) Réglage définitif : *a)* agir comme si le niveau était réglé et rendre, à cette approximation, le pivot vertical ; *b)* noter au vernier principal les deux orientations pour lesquelles la bulle est entre ses repères ; *c)* donner à la partie mobile de l'instrument une direction bissectrice des deux positions notées ; *d)* dans cette orientation, régler le niveau comme on réglerait un niveau à directrice.

Si le pivot est muni de deux niveaux à angle droit, régler ceux-ci indépendamment, et rendre le pivot vertical en plaçant l'un des niveaux dans la direction de deux vis

calantes. — Cette disposition est réalisée dans les montures anglaises à quatre vis : placer les niveaux parallèlement aux diagonales du carré formé par les quatre vis.

*Détermination des erreurs instrumentales : collimation* c *et erreur* w *du zéro du cercle vertical.* — Se placer en station sur un terrain peu incliné, et faire des visées sur un point choisi de façon que la ligne de visée soit sensiblement horizontale : ce sera le milieu d'une croix de Saint André dessinée sur une carte de visite fixée sur un jalon planté en un point convenable, à une distance quelconque. Notations : lectures L sur le cercle horizontal, $l$ sur le cercle vertical.

1) Cas d'un cercle vertical chiffré de manière qu'on y lise des *angles de pente* p. — *a)* position n° 1 du théodolite, avec le bouton moleté du pignon de mise au point du réticule à droite de l'opérateur ; disposer l'instrument de manière que la lecture $L_1$ soit dans le premier quadrant; le vernier principal du cercle vertical à dû être choisi de manière que la lecture $l_1$ (éventuellement diminuées de 4 droits) soit voisine de zéro, noter $L_1$ et $l_1$ ; *b)* retourner de 180° la partie mobile du théodolite autour de la verticale et la lunette bout pour bout : lectures $L_2$ et $l_2$ ; *c)* calcul de $c$ et $w$ :

$$c = \frac{2 \text{ droits} + L_1 - L_2}{2},$$

$$w = \frac{2 \text{ droits} - l_1 - l_2}{2}.$$

2) Cas d'un cercle vertical chiffré de manière qu'on y lise des *distances zénithales* z. — *a)* position n° 1 du théodolite, avec le bouton moleté du pignon de mise au point du réticule à droite de l'opérateur ; disposer l'instrument de manière que la lecture $L_1$ soit dans le premier quadrant ; le vernier principal du cercle vertical a dû être choisi de manière que la lecture $l_1$ soit voisine d'un droit : noter $L_1$ et $l_1$ ; *b)* retourner de 180° la partie mobile du théodolite et la lunette bout pour bout : lectures $L_2$ et $l_2$ ; *c)* calcul de $c$ et $w$ :

$$c = \frac{2 \text{ droits} + L_1 - L_2}{2},$$

$$w = \frac{4 \text{ droits} - l_1 - l_2}{2}.$$

*Annulation des erreurs instrumentales* par réglage du réticule (pour la collimation) et du cercle vertical (pour l'erreur de son zéro).

Laisser à l'instrument sa position de deuxième visée décrite ci-dessus ; calculer l'azimut $A_2$ de la ligne de visée,

$$A_2 = L_2 + c,$$

et soit l'angle de pente $p_2$ (premier cas), soit la distance zénithale $z_2$ (second cas) de cette ligne de visée :

$$p_2 = l_2 + w \qquad \text{ou} \qquad z_2 = l_2 + w.$$

1) *Réglage du réticule.* Manœuvrer la vis de rappel du cercle horizontal jusqu'à ce que la lecture au vernier principal soit $A_2$ ; déplacer le réticule jusqu'à ce que le fil vertical passe de nouveau par l'image du point visé.

2) *Réglage du cercle vertical.* Sans toucher a la lunette, agir sur la vis de réglage du cercle vertical de façon que la lecture au vernier principal de ce cercle devienne $p_2$ (premier cas) ou $z_2$ (second cas).

*Vérification.* Faire une nouvelle détermination de $c$ et de $w$ ; il faut trouver *zéro ;* sinon recommencer.

---

## *Opérations et Calculs*

---

**Triangulation, problème 1.** — *On connaît les coordonnées* $(X_1, Y_1, Z_1)$ *et* $(X_2, Y_2, Z_2)$ *de deux points* $P_1$ *et* $P_2$ *accessibles et visibles l'un de l'autre. On demande les coordonnées* $(X_3, Y_3, Z_3)$ *d'un point* $P_3$ *visible des deux premiers.*

Installation du théodolite en $P_1$ ; orientation par une visée sur $P_2$ ; hauteur $I_1$ du centre de l'instrument. Visée sur la mire placée en $P_3$ ; lectures $L_1$ sur le cercle horizontal, $l_1$ sur le cercle vertical ; $M_1$ hauteur de mire (lecture sur la mire ou hauteur du voyant).

Installation du théodolite en $P_2$ ; orientation par une visée sur $P_1$ ; hauteur $I_2$ du centre de l'instrument. Visée sur la mire placée en $P_3$ ; lectures $L_2$ sur le cercle horizontal, $l_2$ sur le cercle vertical : $M_2$ hauteur de mire.

**Triangulation, problème 2.** — *On connaît les coordonnées* $(X_1, Y_1, Z_1)$ *et* $(X_2, Y_2, Z_2)$ *de deux points* $P_1$ *et* $P_2$, *ainsi que l'azimut* A *d'une direction quelconque* $P_3P'$ *issue d'un point* $P_3$ *d'où les deux premiers sont visibles. On demande les coordonnées* $(X_3, Y_3, Z_3)$ *du point* $P_3$.

Installation du théodolite en $P_3$ ; orientation par une visée dans le vertical $P_3P'$ ; hauteur I du centre de l'instrument. Visée sur la mire placée en $P_1$ : lectures $L_1$, $l_1$, $M_1$. Visée sur la mire placée en $P_2$ : lectures $L_2$, $l_2$, $M_2$.

*Remarque.* — Le théodolite ayant été réglé, la collimation et l'erreur du zéro du cercle vertical sont nulles, et les lectures sur les cercles sont les coordonnées polaires de la ligne de visée :

$$A_1 = L_1, \qquad p_1 = l_1,$$
$$A_2 = L_2, \qquad p_2 = l_2.$$

**Calculs.** — Les calculs relatifs aux problèmes 1 et 2 sont identiques sauf en ceci : dans le problème 2

$$I_1 = I_2 = I,$$

et les différences $M_1 - I_1$, $M_2 - I_2$ changent de signe de l'un à l'autre problème.

Les formules pour le calcul des coordonnées $(X_3, Y_3)$ sont, dans les deux problèmes,

$$X_3 = \frac{(X_1 \operatorname{tg} A_1 - Y_1) - (X_2 \operatorname{tg} A_2 - Y_2)}{\operatorname{tg} A_1 - \operatorname{tg} A_2},$$

$$Y_3 = \frac{(Y_1 \operatorname{cotg} A_1 - X_1) - (Y_2 \operatorname{cotg} A_2 - X_2)}{\operatorname{cotg} A_1 - \operatorname{cotg} A_2},$$

et pour le calcul de $Z_3$

$$Z_3 = Z_1 + \frac{X_3 - X_1}{\cos A_1} \operatorname{tg} p_1 \mp (M_1 - I_1)$$

ou bien

$$Z_3 = Z_2 + \frac{Y_3 - Y_2}{\sin A_2} \operatorname{tg} p_2 \mp (M_2 - I_2)$$

avec les signes supérieurs ou inférieurs suivant que le point inconnu est le point visé (problème 1) ou le point de station (problème 2). On appliquera les deux formules pour se ménager une vérification.

Les calculs se feront au moyen de l'un des groupes de tableaux (A, B, C) du carnet 2. Dans la rédaction de ces tableaux, dont un groupe est reproduit ci-dessus, on a donné aux formules la forme suivante :

$$\begin{cases} \Delta(X \operatorname{tg} A) = X_1 \operatorname{tg} A_1 - X_2 \operatorname{tg} A_2, \\ \Delta(Y \operatorname{cotg} A) = Y_1 \operatorname{cotg} A_1 - Y_2 \operatorname{cotg} A_2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \xi = \Delta(X \operatorname{tg} A) + Y_2 - Y_1, \\ \eta = \Delta(Y \operatorname{cotg} A) + X_2 - X_1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_3 = + \dfrac{\xi \cos A_1 \cos A_2}{\sin (A_1 - A_2)}, \\ Y_3 = - \dfrac{\eta \sin A_1 \sin A_2}{\sin (A_1 - A_2)}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \zeta_1 = (X_3 - X_1) \dfrac{\operatorname{tg} p_1}{\cos A_1}, \\ \zeta_2 = (Y_3 - Y_2) \dfrac{\operatorname{tg} p_2}{\sin A_2}, \end{cases}$$

$$Z_3 = Z_1 + \zeta_1 \mp (M_1 - I_1) = Z_2 + \zeta_2 \mp (M_2 - I_2).$$

**Carnet 2. Triangulation. N° , p. et .**

Point inconnu : , S, V.
Point connu n° 1 : , S, V.
Point connu n° 2 : , S, V.

TABLEAU A

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $X_1$ | | 50 | 8 | $Y_1$ | | 59 |
| 2 | $X_2$ | | 9 | 9 | $Y_2$ | | 62 |
| 3 | $X_1 - X_2$ | + | 41 | 10 | $Y_1 - Y_2$ | + | 24 |
| 4 | $A_1$ | | 7 | 11 | $\alpha_1$ | | 12 |
| 5 | $A_2$ | | 14 | 12 | $\alpha_2$ | | 13 |
| 6 | $A_1 - A_2$ | | 11 | 13 | $\delta$ | | 15 |
| 7 | $p_1$ | + | 57 | 14 | $p_2$ | + | 69 |

TABLEAU C

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 49 | $X_3$ | | 48 | 61 | $Y_3$ | | 51 |
| 50 | $X_1$ | | 8 | 62 | $Y_2$ | | 71 |
| 51 | $X_3 - X_1$ | + | 63 | 63 | $Y_3 - Y_2$ | + | 52 |
| 52 | $l\|X_3 - X_1\|$ | | 64 | 64 | $l\|Y_3 - Y_2\|$ | | 55 |
| 53 | $cl \cos \alpha_1$ | | 16 | 65 | $cl \sin \alpha_2$ | | 28 |
| 54 | $l \operatorname{tg} \|p_1\|$ | | 66 | 66 | $l \operatorname{tg} \|p_2\|$ | | 17 |
| 55 | $l\|\zeta_1\|$ | | 67 | 67 | $l\|\zeta_2\|$ | | 56 |
| 56 | $\zeta_1$ | + | 68 | 68 | $\zeta_2$ | + | 58 |
| 57 | $\pm (M_1 I_1 -)$ | | 2 | 69 | $\pm (M_2 - I_2)$ | | 3 |
| 58 | $Z_3 - Z_1$ | | 70 | 70 | $Z_3 - Z_2$ | | 60 |
| 59 | $Z_1$ | | 4 | 71 | $Z_2$ | | 5 |
| 60 | $Z_3$ | | 72 | 72 | $Z_3$ | | |

TABLEAU B

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 15 | $l\,X_1$ | | 32 | 32 | $l\,Y_1$ | | 18 |
| 16 | $l\,\mathrm{tg}\,\alpha_1$ | | 33 | 33 | $l\,\mathrm{ctg}\,\alpha_1$ | | 45 |
| 17 | $l(X_1\,\mathrm{tg}\,\alpha_1)$ | | 34 | 34 | $l(Y_1\,\mathrm{ctg}\,\alpha_1)$ | | 20 |
| 18 | $l\,X_2$ | | 35 | 35 | $l\,Y_2$ | | 44 |
| 19 | $l\,\mathrm{tg}\,\alpha_2$ | | 36 | 36 | $l\,\mathrm{ctg}\,\alpha_2$ | | 29 |
| 20 | $l(X_2\,\mathrm{tg}\,\alpha_2)$ | | 37 | 37 | $l(Y_2\,\mathrm{ctg}\,\alpha_2)$ | | 21 |
| 21 | $X_1\,\mathrm{tg}\,A_1$ | + | 38 | 38 | $Y_1\,\mathrm{ctg}\,A_1$ | + | 22 |
| 22 | $-X_2\,\mathrm{tg}\,A_2$ | + | 39 | 39 | $-Y_2\mathrm{ctg}\,A_2$ | ± | 23 |
| 23 | $\Delta(X\,\mathrm{tg}\,A)$ | | 40 | 40 | $\Delta(Y\,\mathrm{ctg}\,A)$ | | 25 |
| 24 | $Y_2 - Y_1$ | ± | 6 | 41 | $X_2 - X_1$ | + | 10 |
| 25 | $\xi$ | + | 42 | 42 | $\eta$ | + | 26 |
| 26 | $l\,\lvert\xi\rvert$ | | 43 | 43 | $l\,\lvert\eta\rvert$ | | 30 |
| 27 | $l\cos\alpha_1$ | | 53 | 44 | $l\sin\alpha_1$ | | 27 |
| 28 | $l\cos\alpha_2$ | | 19 | 45 | $l\sin\alpha_2$ | | 65 |
| 29 | $cl\sin\delta$ | | 46 | 46 | $cl\sin\delta$ | | 54 |
| 30 | $l\,\lvert X_3\rvert$ | | 47 | 47 | $l\,\lvert Y_3\rvert$ | | 31 |
| 31 | $X_3$ | | 49 | 48 | $Y_3$ | | 61 |

$X_3 =$ ..... $Y_3 =$ ..... $Z_3 =$ .....

Les lignes à remplir sont numérotées (colonnes de gauche) de 1 à 72. Commencer à la ligne 1 ; le nombre de droite de chaque ligne indique la ligne qu'il faut remplir immédiatement après, et ainsi de suite.

$\alpha_1$ est l'angle du premier quadrant dont le sinus et le cosinus ont même valeur absolue que le sinus et le cosinus de l'angle $A_1$. De même $\alpha_2$ vis-à-vis de $A_2$, et $\delta$ vis-à-vis de $(A_1 - A_2)$.

*l* est écrit pour *log*, et *cl* pour *colog*.

En tête des tableaux, sur les lignes *Point inconnu,...* on spécifiera les points considérés. Sur chacune de ces lignes, on biffera la lettre S ou V suivant que le point correspondant est un point visé ou un point de station. Si, à la ligne *Point inconnu*, on biffe la lettre S, c'est qu'on se trouve dans le cas du *Problème 1* ; si l'on biffe la lettre V, c'est qu'on se trouve dans le cas du *Problème 2*. Dans le premier cas, on adoptera les signes supérieurs aux lignes 57 et 69 ; dans le second cas, les signes inférieurs. Les signes adoptés seront entourés d'une petite circonférence.

Pour faciliter le choix des signes aux autres lignes, nous supposerons que les axes ont été définis de façon que les coordonnées $(X_1, Y_1)$, $(X_2, Y_2)$ soient positives. On verrait facilement comment les règles devraient être modifiées s'il en était autrement ; en particulier, il faudrait remplacer $l X_1$ par $l \mid X_1 \mid$, etc.

Aux lignes 21 et 38 les signes sont celui de tg $A_1$ ; aux lignes 22 et 39, ce sont les signes *contraires* à celui de tg $A_2$.

Le signe de $X_3$ (ligne 31) résulte de ceux de $\xi$, cos $A_1$, cos $A_2$ et sin $(A_1 - A_2)$ ; celui de $Y_3$ (ligne 48) résulte de ceux de $\eta$, sin $A_1$, sin $A_2$ et sin $(A_1 - A_2)$.

Le signe de $X_3$ est *plus* ou *moins* suivant que, dans le produit $\xi$ cos $A_1$ cos $A_2$ cosec $(A_1 - A_2)$, le nombre des facteurs négatifs est *pair* ou *impair*.

**Attention !** Le signe de $Y_3$ est *plus* ou *moins* suivant que, dans le produit $\eta$ sin $A_1$ sin $A_2$ cosec $(A_1 - A_2)$, le nombre des facteurs négatifs est *impair* ou *pair*.

Les signes de $\zeta_1$ et de $\zeta_2$ (lignes 56 et 68) résultent respectivement de ceux de $(X_3 - X_1, \cos A_1, \operatorname{tg} p_1)$ et de $(Y_3 - Y_2, \sin A_2, \operatorname{tg} p_2)$, signe *plus* ou *moins* suivant que, dans le produit considéré, le nombre des facteurs négatifs est *pair* ou *impair*.

Toutes les additions indiquées sont algébriques.

Pour diminuer les chances d'erreur, il sera bon de faire un croquis à peu près à l'échelle, représentant, en projection horizontale, les axes coordonnés (ou des parallèles aux axes convenablement choisies) et les points $P_1$, $P_2$, $P_3$.

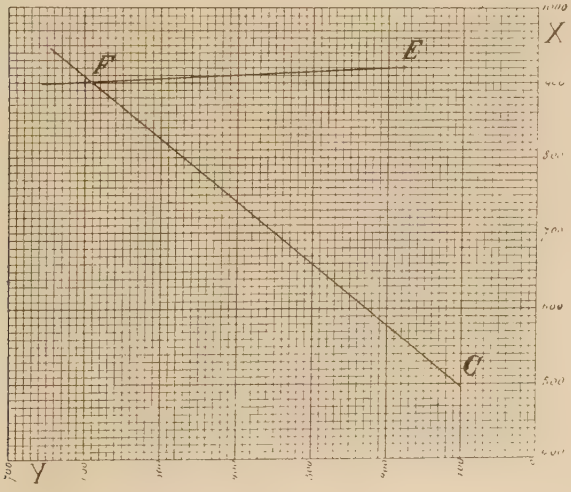
**Exemple.** — A partir de deux points connus C et E

| | | | |
|---|---|---|---|
| C... | $X_1 = 493{,}43$ | $Y_1 = 99{,}71$ | $Z_1 = 63{,}23$ |
| E... | $X_2 = 920{,}23$ | $Y_2 = 176{,}24$ | $Z_2 = 69{,}19$ |

on effectue un recoupement sur un point inconnu F. C'est une application du problème 1. Les *observations* ont donné :

| | | |
|---|---|---|
| $A_1 = 50^\circ\,30'$ | $p_1 = 0^\circ\,35'$ | $M_1 - I_1 = 2{,}76$ |
| $A_2 = 92^\circ\,37'$ | $p_2 = 0^\circ\,4'$ | $M_2 - I_2 = 2{,}65$ |

*Croquis :*



*Calculs :*

TABLEAU A

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $X_1$ | 493,43 | 8 | $Y_1$ | 99 ,1 |
| 2 | $X_2$ | 920,23 | 9 | $Y_2$ | 176,24 |
| 3 | $X_1 - X_2$ | − 426,80 | 10 | $Y_1 - Y_2$ | − 76,53 |
| 4 | $A_1$ | 50° 30′ | 11 | $\alpha_1$ | 50° 30′ |
| 5 | $A_2$ | 92° 37′ | 12 | $\alpha_2$ | 87° 23′ |
| 6 | $A_1 - A_2$ | 317° 53′ | 13 | $\delta$ | 42° 7′ |
| 7 | $p_1$ | + 0° 35′ | 14 | $p_2$ | + 0° 4′ |

TABLEAU B

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 15 | $l\,X_1$ | 2,6932256 + | 32 | $l\,Y_1$ | 1,9987387 + |
| 16 | $l$ tg $\alpha_1$ | 0,0838955 + | 33 | $l$ ctg $\alpha_1$ | 1,9161045 + |
| 17 | $l(X_1$ tg $\alpha_1)$ | 2,7771211 + | 34 | $l(Y_1$ ctg $\alpha_1)$ | 1,9148432 + |
| 18 | $l\,X_2$ | 2,9638964 + | 35 | $l\,Y_2$ | 2,2461045 + |
| 19 | $l$ tg $\alpha_2$ | 1,3400721 − | 36 | $l$ ctg $\alpha_2$ | 2,6599279 − |
| 20 | $l(X_2$ tg $\alpha_2)$ | 4,3039785 − | 37 | $l(Y_2$ ctg $\alpha_2)$ | 0,9060324 − |
| 21 | $X_1$ tg $A_1$ | + 598,58 | 38 | $Y_1$ ctg $A_1$ | + 82,19 |
| 22 | $-X_2$ tg $A_2$ | + 20125,78 | 39 | $-Y_2$ ctg $A_2$ | + 8,05 |
| 23 | $\Delta$ (X tg A) | + 20734,36 | 40 | $\Delta$ (Y ctg A) | + 90,24 |
| 24 | $Y_2 - Y_1$ | + 76,53 | 41 | $X_2 - X_1$ | + 427,80 |
| 25 | $\xi$ | + 20810,89 | 42 | $\eta$ | + 517,04 |
| 26 | $l\,\lvert\xi\rvert$ | 4,3182906 + | 43 | $l\,\lvert\eta\rvert$ | 2,7135325 + |
| 27 | $l$ cos $\alpha_1$ | 1,8035105 + | 44 | $l$ sin $\alpha_1$ | 1,8874061 + |
| 28 | $l$ cos $\alpha_2$ | 2,6594848 − | 45 | $l$ sin $\alpha_2$ | 1,9995469 + |
| 29 | $cl$ sin $\delta$ | 0,1735090 − | 46 | $cl$ sin $\delta$ | 0,1735090 − |
| 30 | $l\,\lvert X_3\rvert$ | 2,9547849 + | 47 | $l\,\lvert Y_3\rvert$ | 2,7739945 − |
| 31 | $X_3$ | 901,13 | 48 | $Y_3$ | 593,60 |

TABLEAU C

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 49 | $X_3$ | 901,12 | 61 | $Y_3$ | 593,60 |
| 50 | $X_1$ | 493,43 | 62 | $Y_2$ | 176,24 |
| 51 | $X_3 - X_1$ | 407,69 | 63 | $Y_3 - Y_2$ | 417,36 |
| 52 | $l \mid X_3 - X_1 \mid$ | 2,6103301 + | 64 | $l \mid Y_3 - Y_2 \mid$ | 2,6205108 + |
| 53 | $cl \cos \alpha_1$ | 0,1964895 + | 65 | $cl \sin \alpha_2$ | 0,0004531 + |
| 54 | $l \operatorname{tg} \mid p_1 \mid$ | 2,0078092 + | 66 | $l \operatorname{tg} \mid p_2 \mid$ | $\bar{3}$,0659863 + |
| 55 | $l \mid z_1 \mid$ | 0,8146288 + | 67 | $l \mid z_2 \mid$ | $\bar{1}$,6867502 + |
| 56 | $z_1$ | + 6,53 | 68 | $z_2$ | + 0,49 |
| 57 | $-(M_1 - I_1)$ | — 2,87 | 69 | $-(M_2 - I_2)$ | — 2,65 |
| 58 | $Z_3 - Z_1$ | + 3,77 | 70 | $Z_3 - Z_2$ | — 2,16 |
| 59 | $Z_1$ | 63.23 | 71 | $Z_2$ | 69,19 |
| 60 | $Z_3$ | 67,00 | 72 | $Z_3$ | 67.03 |

*Remarque.* — On vient de faire usage d'une table de logarithmes à sept décimales. On jugera dans chaque cas particulier si pareille précision est nécessaire. L'emploi des logarithmes est toujours une source d'ennuis. Si l'on disposait d'une machine à calculer, il vaudrait mieux faire usage des valeurs naturelles des fonctions trigonométriques.

**Courbure de la Terre et réfraction.** — La courbure de la Terre et la réfraction atmosphérique affectent les cotes Z. Pour un angle de pente $p$ de la ligne de visée, et une distance D (horizontale) du point de station au point visé, (ON N'ENVISAGE ICI QUE LE CAS DU PROBLÈME 1), on compensera ces deux erreurs en augmentant la cote calculée de

$$\frac{D^2}{2R} \frac{0{,}84 + \sin^2 p}{\cos^2 p}, \quad \text{ou} \quad \frac{D^2}{2R} \frac{2{,}68 - \cos 2p}{1 + \cos 2p}$$

où R est le rayon de la sphère terrestre.

Dans la pratique, $p$ sera souvent assez voisin de 0 pour que cette correction puisse se réduire à

$$0{,}84 \frac{D^2}{2R} \quad \text{ou} \quad \frac{0{,}66\ (\text{D mètres})^2}{10\,000\,000},$$

et il suffit de mesurer D sur le croquis.

Pour les valeurs de D allant de 80 a 1000 m, de 20 en 20 m, la table I ci-dessous donne les expressions $\rho = \frac{D^2}{2R}$ et 0,84 ρ à un demi-millimètre près

TABLE I

| D | ρ | 0,84 ρ | D | ρ | 0,84 ρ |
|---|---|---|---|---|---|
| 80 | 0,001 | 0,000 | | | |
| 100 | 0,001 | 0,001 | 500 | 0,020 | 0,017 |
| 120 | 0,001 | 0,001 | 520 | 0,021 | 0,018 |
| 140 | 0,002 | 0,001 | 540 | 0,023 | 0,019 |
| 160 | 0,002 | 0,002 | 560 | 0,025 | 0,021 |
| 180 | 0,003 | 0,002 | 580 | 0,026 | 0,022 |
| 200 | 0,003 | 0,003 | 600 | 0,028 | 0,024 |
| 220 | 0,004 | 0,003 | 620 | 0,030 | 0,026 |
| 240 | 0,005 | 0,004 | 640 | 0,032 | 0,027 |
| 260 | 0,005 | 0,005 | 660 | 0,034 | 0,029 |
| 280 | 0,006 | 0,005 | 680 | 0,036 | 0,031 |
| 300 | 0,007 | 0,006 | 700 | 0,039 | 0,032 |
| 320 | 0,008 | 0,007 | 720 | 0,041 | 0,034 |
| 340 | 0,009 | 0,008 | 740 | 0,043 | 0,036 |
| 360 | 0,010 | 0,009 | 760 | 0,045 | 0,038 |
| 380 | 0,011 | 0,010 | 780 | 0,048 | 0,040 |
| 400 | 0,013 | 0,011 | 800 | 0,050 | 0,042 |
| 420 | 0,014 | 0,012 | 820 | 0,053 | 0,044 |
| 440 | 0,015 | 0,013 | 840 | 0,055 | 0,047 |
| 460 | 0,017 | 0,014 | 860 | 0,058 | 0,049 |
| 480 | 0,018 | 0,015 | 880 | 0,061 | 0,051 |
| 500 | 0,020 | 0,017 | 900 | 0,064 | 0,053 |
| | | | 920 | 0,067 | 0,056 |
| | | | 940 | 0,069 | 0,058 |
| | | | 960 | 0,072 | 0,061 |
| | | | 980 | 0,075 | 9,063 |
| | | | 1000 | 0,079 | 0,066 |

La valeur absolue de l'angle de pente *p* pour laquelle on peut, à une approximation donnée, adopter la correction 0,84 ρ, comme si *p* était nul, est d'autant plus grande que D est moindre. La table II indique, pour chacune des diverses distances D, de 100 en 100 m, jusque 1000 m,

l'angle $p$ en deça duquel on peut adopter la correction $0{,}84\,\rho$ sans commettre une erreur qui atteigne le millimètre

Table II

| D | $p$ | D | $p$ |
|---|---|---|---|
| 100 | 39° 19′ | 600 | 7° 53′ |
| 200 | 22 37 | 700 | 6 46 |
| 300 | 15 28 | 800 | 5 56 |
| 400 | 11 44 | 900 | 5 17 |
| 500 | 9 27 | 1000 | 4 45 |

Pour une valeur absolue plus grande de l'angle $p$, il faudra employer la correction

$$f\rho \quad \text{où} \quad f = \frac{2{,}68 - \cos 2p}{1 + \cos 2p}.$$

Le facteur $\rho$ se prendra dans la table I, et le facteur $f$ dans la table III ci-dessous, où il a été calculé pour les valeurs de $|p|$ de 30 en 30 minutes, depuis 5° jusque 15° 30′.

Table III

| $\lvert p \rvert$ | $f$ | $\lvert p \rvert$ | $f$ |
|---|---|---|---|
| 5° 0′ | 0,854 | 10° 30′ | 0,903 |
| 5 30 | 0,857 | 11 0 | 0,909 |
| 6 0 | 0,860 | 11 30 | 0,916 |
| 6 30 | 0,864 | 12 0 | 0,923 |
| 7 0 | 0,868 | 12 30 | 0,930 |
| 7 30 | 0,872 | 13 0 | 0,938 |
| 8 0 | 0,876 | 13 30 | 0,946 |
| 8 30 | 0,881 | 14 0 | 0,954 |
| 9 0 | 0,886 | 14 30 | 0,963 |
| 9 30 | 0,891 | 15 0 | 0,972 |
| 10 0 | 0,897 | 15 30 | 0,981 |

Dans l'exemple ci-dessus :

1) à partir du point n° 1,

$$D = 630 \text{ m}, \qquad Z_3 = 67{,}00 + 0{,}03 = 67{,}03,$$

2) à partir du point n° 2,

$$D = 410 \text{ m}, \qquad Z_3 = 67{,}03 + 0{,}01 = 67{,}04$$

et les résultats définitifs sont

$$X_3 = 901{,}12, \qquad Y_3 = 593{,}60, \qquad Z_3 = 67{,}035$$

## *LEVERS STADIMÉTRIQUES*

**Opérations.** — En chaque point du cheminement stadimétrique :

1) Mise en station du théodolite ;

2) Orientation du cercle horizontal par une visée sur un point dont l'azimut (par rapport au point de station) est connu, à savoir :

α) si le point de station est le premier du cheminement,et un sommet de la triangulation, l'orientation du cercle horizontal se fait par une visée sur un autre sommet de la triangulation ;

β) si le point de station est un point quelconque du cheminement, l'orientation du cercle horizontal se fait par une visée sur le point précédent du cheminement (vérification au moyen de l'aiguille aimantée) ;

3) Visée sur la mire (parlante) placée en un point de rayonnement ou au point suivant du cheminemeut.

**Lectures.** — Les lectures, dont il faut prendre note, sont :

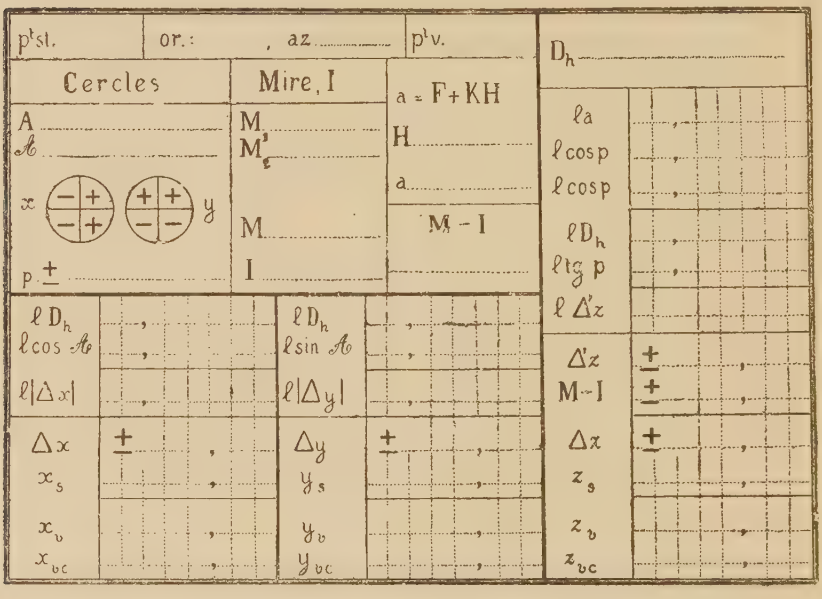
1) Hauteur I du centre de l'instrument ;

2) Lectures sur le cercle horizontal et sur le cercle vertical, aux verniers principaux (éventuellement corrigées de l'excentricité par des lectures aux verniers secondaires) ; la collimation et l'erreur du zéro du cercle vertical ont été annulées, de sorte que ces lectures sur les deux cercles sont respectivement l'azimut A et l'angle de pente $p$ de la ligne de visée principale ;

3) Lectures sur la mire : M à la ligne de visée principale,

$M_1$ et $M_2$ aux lignes de visée secondaires ; M est d'autant plus voisin de $[(M_1 + M_2) : 2]$ que $p$ est moindre.

Les inscriptions se font dans le carnet n° 3 dont chaque demi-page (de droite) correspond à une visée : les calculs se feront dans la même demi-page. Ci-dessous un tableau extrait du carnet n° 3.

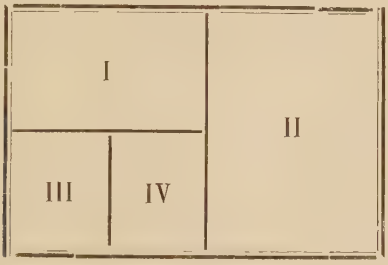



**Inscriptions et calculs.** — Le calcul des coordonnées $(x_v, y_v, z_v)$ du point visé, à partir des coordonnées $(x_s, y_s, z_s)$ du point de station, et au moyen des lectures spécifiées ci-dessus, se fait par formules suivantes :

$$\begin{cases} H = M_1 - M_2, \\ a = F + KH, \\ D_h = a \cos^2 p, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_v = x_s + D_h \cos A, \\ y_v = y_s + D_h \sin A, \\ z_v = z_s + D_h \operatorname{tg} p - (M - I). \end{cases}$$

Le tableau de carnet n° 3 est divisé par de gros traits en quatre cases principales :




1) Au haut de la case I, inscrire le point de station, le point par une visée sur lequel se fait l'orientation du cercle horizontal, et l'azimut de ce dernier point par rapport au point de station.

2) Au bas des cases III, IV et II, inscrire les coordonnées ($x_s$, $y_s$, $z_s$) du point de station.

3) Au haut de la case I, inscrire le point visé.

4) Dans la case I, inscrire les lectures I, A, $p$, M, $M_1$, $M_2$ ; à la ligne $p$ une petite circonférence entourera le signe qui doit être adopté

5) $\alpha$ (mis ici pour A cursif) est l'angle du premier quadrant dont le sinus et le cosinus ont même valeur absolue que le sinus et le cosinus de l'angle A.

6) Entourer d'une petite circonférence le signe qui se trouve dans le secteur des deux cercles de la case I auquel appartient l'angle A. Du double signe (ligne $\Delta x$) de la case III, garder, en l'entourant d'une petite circonférence, le signe retenu dans le cercle de gauche de la case I. De même, du double signe (ligne $\Delta y$) de la case IV garder le signe retenu dans le cercle de droite de la case I.

7) Dans la case II, à la ligne $\Delta' z$, adopter le signe *supérieur ou inférieur* suivant que $p$ est positif ou négatif ; inversement, à la ligne (M – I), adopter le signe *inférieur ou supérieur* suivant que $p$ est positif ou négatif (le signe

de $\Delta z$ résulte de l'addition algébrique des deux lignes précédentes).

8) Calculs de la case I ; F et K sont les constantes stadimétriques de la lunette :

$$H = M_1 - M_2, \qquad a = F + KH, \qquad M - I ;$$

ranport de (M — I) dans la case II, sans changement de signe ou avec changement de signe suivant que le signe retenu à la ligne (M — I) de la case II est *plus* ou *moins*.

9) Case II, inscription de log $a$.

10) Case II, inscription de log cos $p$, log cos $p$, log tg $|p|$.

11) Cases III et IV, inscription de log cos $\alpha$ et log sin $\alpha$.

12) Case II, calcul de log $D_h$, transporté immédiatement dans les cases III et IV, et calcul de log $|\Delta' z|$.

13) Cases III et IV, calcul de log $|\Delta x|$, log $|\Delta y|$.

14) Cases III, IV, II, calcul de $\Delta x$, $\Delta y$, $\Delta' z$ qui prennent les signes préparés.

15) Cases III, IV, II, calcul de $x_v$, $y_v$, $\Delta z$, $z_v$.

*Remarques.* — Après une visée à grande distance, on pourra avoir besoin de connaître $D_h$ en vue de la correction de courbure terrestre et de réfraction ; on l'inscrira au haut de la case II. — Le cheminement terminé, on corrigera les coordonnées de tous ses points d'après les erreurs de fermeture en $x$, $y$ et $z$ ; les coordonnées corrigées s'écriront au bas des cases III, IV, II.

**Exemple.** — Un cheminement stadimétrique $b$ dont les sommets sont $b_1$, $b_2$, $b_3$, ... va du sommet C au sommet D d'une triangulation. Ce cheminement est fait au moyen d'un théodolite anallatique (F = 0) dont le coefficient K vaut 200.

Par une station en C, orientation du cercle horizontal par une visée sur D, et une visée sur $b_1$, on a déterminé les coordonnées de ce dernier point. Par une station en $b_1$, orientation du cercle horizontal par une visée sur C, et une

visée sur $b_2$, on a déterminé les coordonnées de ce dernier point ; on a trouvé

$az\ (b_1 b_2) = 252^\circ 34'$ $\quad x = 194{,}25$ $\quad y = 349{,}29$ $\quad z = 22{,}65$

Ce point va servir de point de station pour une visée sur le point suivant $b_3$ ; le cercle horizontal y est orienté par une visée sur $b_1$ :

pt st. $b_2$ $\quad or.$ : $b_1$ $\quad az.\ 52^\circ 34'$ $\quad$ pt v. $b_3$.

*Lectures* et déductions immédiates :

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| A | $242^\circ 57'$ | $M_1$ | 1,166 | H | 0,233 |
| α | $62^\circ 56'$ | $M_2$ | 0,833 | $a$ | 46,60 |
| $p$ | $+ 7^\circ 12'$ | M | 1,000 | M — I | — 0,40 |
| | | I | 1,400 | | |

*Choix des signes* dans les cases III, IV, II.

*Calculs :*

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| log $a$ | $\bar{1}$,66839 | | | | |
| log cos $p$ | $\bar{1}$,99653 | | | | |
| log cos $p$ | $\bar{1}$,99656 | | | | |
| log $D_h$ | 1,66151 | log $D_h$ | 1,66151 | log $D_h$ | 1,66151 |
| log tg $\lvert p \rvert$ | $\bar{1}$,10150 | log cos α | $\bar{1}$,65804 | log sin α | $\bar{1}$,94962 |
| log $\lvert \Delta' z \rvert$ | 0,76301 | log $\lvert \Delta x \rvert$ | 1,31955 | log $\lvert \Delta y \rvert$ | 1,61113 |
| $\Delta' z$ | + 5,79 | $\Delta x$ | — 20,87 | $\Delta y$ | — 40,84 |
| M — I | — 0,40 | $x_s$ | 194,25 | $y_s$ | 349,29 |
| $\Delta z$ | + 5,39 | $x_v$ | 173,38 | $y_v$ | 308,45 |
| $z_s$ | 22,66 | | | | |
| $z_v$ | 28,05 | | | | |

N° 19.

# *Représentation géométrique simultanée des trois premières fonctions elliptiques de Jacobi*

*par* **M. M.** *Alliaume* [1]

1. Dans un mémoire publié en 1879 [2], H. Léauté a étudié les relations qui existent entre les fonctions elliptiques de première espèce et les coordonnées des points d'une biquadratique gauche. Plusieurs de ces relations étaient déjà connues, dues, en particulier, à Jacobi, Clebsch, Laguerre, Cremona [3]. Les plus

---

[1] Annales de la Société scientifique de Bruxelles, t. 44 (1925), p. 307 de la première partie.

[2] H. Léauté, *Étude géométrique sur les fonctions elliptiques de première espèce*, Journal de l'École polytechnique, 46e cahier (t. 28, 1879). Ce mémoire a été précédé de quelques notes du même auteur sur le même sujet aux Comptes-Rendus Ac. Sc. Paris : *Sur quelques applications aux courbes du second degré du théorème d'Abel relatif aux fonctions elliptiques*, t. 79, (1874, 2), pp. 93, 602 ; *Représentation des fonctions elliptiques de première espèce à l'aide des biquadratiques gauches*, t. 83 (1876, 2).

[3] La bibliographie se trouve dans le mémoire de Léauté signalé ci-dessus. Principaux articles : Jacobi, *Ueber die Anwendung der elliptischen Transcendenten auf ein bekanntes Problem der Elementargeometrie...*, Journal für reine und angew. Mathem., t. 3 (1828), p. 376 (*Œuvres complètes*, t. 1, p. 277) [Rapprocher de : C. Hermite, *Sur la construction géométrique de l'équation relative à l'addition des intégrales elliptiques de première espèce*, Bull. Sc. mathém. et astron., t. 2 (1871), p. 21]. — Laguerre, *Sur un problème de Géométrie relatif aux courbes du quatrième ordre*, Journal Math. pures et appl., 2e série, t. 15, p. 197. — Par une droite quelconque s'appuyant sur la biquadratique en deux points passent quatre plans tangents à cette ligne ; quelle que soit la droite, le rapport anharmonique des quatre plans tangents est invariable ; cet important théorème est dû à Cremona [*Mémoire de Géométrie pure sur les surfaces du troisième ordre*, Journal de Borchardt, t. 68, p. 119]

remarquables sont devenues classiques (1), et on peut y voir, en un certain sens, une représentation géométrique des fonctions elliptiques de première espèce.

Par une transformation homographique convenable, on peut toujours ramener les équations de toute biquadratique gauche à la forme suivante :

$$x^2 + y^2 - 1 = 0,$$
$$k^2x^2 + z^2 - 1 = 0,$$

intersection d'un cylindre circulaire et d'un cylindre elliptique ayant pour droite des centres respectivement l'axe des $z$ et l'axe des $y$.

Les équations paramétriques de cette biquadratique gauche particulière peuvent s'écrire, moyennant le module $k$ (moindre que l'unité),

$$x = \operatorname{sn} u, \quad y = \operatorname{cn} u, \quad z = \operatorname{dn} u,$$

d'où l'intérêt que présente cette ligne dans l'interprétation géométrique des fonctions elliptiques. Cette étude conduit à des propriétés intéressantes. Rappelons que, si deux tangentes à la biquadratique sont dans un même plan sans être parallèles, le lieu de leur point de rencontre est constitué de trois courbes planes dont chacune appartient à l'un des plans de coordonnées. En particulier, le lieu de ceux de ces points qui sont situés dans le plan des $yz$ est la courbe du quatrième ordre ayant pour équations paramétriques

$$x = 0, \quad y = \frac{1}{\operatorname{cn} u}, \quad z = \frac{1}{\operatorname{dn} u},$$

moyennant le même module $k$ (2).

---

C'est Léauté qui, dès 1876, en sa seconde des notes aux COMPTES-RENDUS signalées ci-dessus, a fait connaître la relation qui existe entre ce rapport anharmonique attaché à la biquadratique et le module des fonctions elliptiques au moyen desquelles sont écrites les équations paramétriques de cette courbe. En 1877, A. Harnack a retrouvé ce résultat dans un mémoire inséré au t. 12 (p. 47) des MATHEMATISCHE ANNALEN : *Ueber die Darstellung der Raumcurve vierter Ordnung durch doppelt periodische Functionen.*

(1) Voir, entre autres ouvrages : P. Appell et E. Lacour, *Principes de la théorie des fonctions elliptiques et applications*, Paris, Gauthier-Villars, 1897, pp. 160-167.

(2) « Cette ligne et les lignes analogues situées dans les autres plans de coordonnées et le plan de l'infini sont les lignes doubles de la surface du

Mais on peut dire aussi que pareille interprétation ne constitue pas, à proprement parler, une représentation géométrique des fonctions elliptiques, car on n'y aperçoit pas la signification du paramètre $u$ (²).

**2.** Considérons plutôt la courbe gauche dont les équations paramétriques sont :

$$x = \operatorname{sn} u, \quad y = \frac{1}{\operatorname{cn} u}, \quad z = \frac{1}{\operatorname{dn} u}.$$

C'est, par exemple, l'intersection des deux cylindres du quatrième ordre

$$y^2 - x^2y^2 = 1,$$
$$z^2 - k^2x^2z^2 = 1,$$

dont les génératrices sont respectivement parallèles à l'axe des $z$ et à l'axe des $y$. Les directrices de ces cylindres dans le plan des $xy$ et dans le plan des $xz$ sont symétriques par rapport aux axes des $y$ et des $z$, respectivement, et nous n'envisagerons, de chacune, que la demi-branche dont les points ont des abscisses non négatives. Ces deux demi-directrices atteignent le plan des $yz$

---

huitième ordre engendrée par les tangentes à la biquadratique » (P. Appell et E. Lacour, ouv. cité, p. 165). Dans une étude voisine de celle-ci nous avons eu à établir les équations de ces lignes des deux autres plans de coordonnées ; ce sont

$$x = \frac{1}{\operatorname{sn} u}, \qquad y = 0, \qquad z = \frac{1 - k^2}{\operatorname{dn} u},$$

$$x = \frac{1}{k^2 \operatorname{sn} u}, \qquad y = \frac{k^2 - 1}{k^2 \operatorname{cn} u}, \qquad z = 0.$$

(¹) Dans son *Traité élémentaire des fonctions elliptiques* (Bruxelles, 1841), P. F. Verhulst, professeur à l'École militaire de Belgique, a proposé une représentation géométrique très simple de la fonction $\operatorname{sn} u$ (p. 34). Dans la courbe qui a pour équation polaire (en $\rho, \varphi$)

$$\rho^2 = \frac{2}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}},$$

le secteur $(0, \varphi)$ est l'argument dont la fonction sn est $\sin \theta$, moyennant le module $k$.

respectivement aux points (0, 1, 0) et (0, 0, 1) ; celle du plan des $xy$ admet l'asymptote

$$x = 1, \quad z = 0,$$

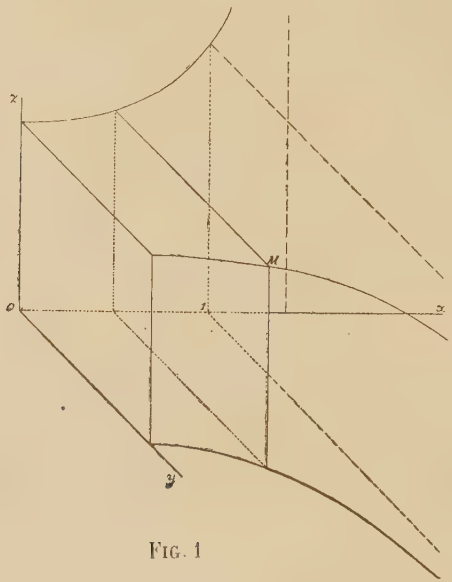



FIG. 1

et celle du plan des $xz$ admet l'asymptote

$$x = \frac{1}{k}, \quad y = 0.$$

La ligne d'intersection des deux cylindres est symétrique par rapport au plan des $yz$, et ne sera considérée que dans sa partie dont les points ont une abscisse non négative. Elle atteint son plan de symétrie au point (0, 1, 1), et admet l'asymptote

$$x = 1, \quad y = \frac{1}{\sqrt{1 - k^2}}.$$

**3**. Prenons un point quelconque M ($x$, $y$, $z$) de la ligne d'intersection des deux cylindres du quatrième ordre, et menons par ce point le plan parallèle au plan des $yz$.

Les trois plans de coordonnées, les deux cylindres et le plan qui vient d'être construit limitent un volume dont la mesure est exprimée par l'intégrale

$$\int_o^x xz \cdot dx,$$

ou, au moyen de la variable indépendante $u$,

$$\int_o^u \frac{d \operatorname{sn} u}{\operatorname{cn} u \operatorname{dn} u} = \int_o^u du = u.$$

Telle est la correspondance qui existe, le long de la ligne décrite ci-dessus, moyennant le module $k$, entre les trois premières fonctions elliptiques de Jacobi et le paramètre $u$ : á un point M de cette courbe correspondant au volume dont la mesure est $u$, ce point a pour coordonnées $(x, y, z)$ les valeurs que prennent, pour cette valeur de $u$, respectivement la fonction sn $u$, l'inverse de la fonction cn $u$ et l'inverse de la fonction dn $u$.

Lorsque le point M s'éloigne indéfiniment le long de la courbe gauche, le volume correspondant tend vers

$$\omega = \int_o^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

quart de période des fonctions sn et cn (1).

(1) Les ouvrages généraux sur les fonctions elliptiques renferment ordinairement une table des valeurs du quart de période $\omega$ en fonction de l'angle $\theta = \text{arc sin } k$. Les tables récentes publiées par G. Greenhill et R. Hippisley

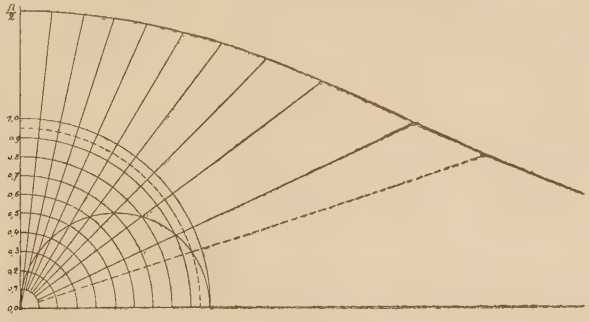


Fig. 2

La figure ci-jointe, en perspective isométrique, a été faite pour

$$k = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

---

dans les *Smithsonian mathematical formulae* (Washington, 1922) donnent $\omega$ pour les valeurs de $\theta$ de cinq en cinq degrés depuis $\theta = 0$ jusque $\theta = 80°$ et de degré en degré dans la dernière décade. Nous en avons déduit le graphique (page 65) dans lequel on aperçoit à la fois les valeurs correspondantes de $\theta$, $k = \sin\theta$ et $\omega$. Les angles $\theta$ se mesurent à partir de l'axe qui porte une graduation, et vers la droite ; la demi-circonférence a un diamètre égal à l'unité, et le module elliptique $k$ est mesuré par le segment de la demi-droite d'extrémité de l'angle $\theta$ qui est intérieur à cette circonférence ; enfin le segment de cette demi-droite qui se termine à la courbe extérieure du diagramme mesure le quart de période $\omega$ correspondant à ce module. Le graphique porte ces éléments géométriques pour les valeurs de $k$ multiples de 0,1 et une construction supplémentaire (en traits interrompus) pour $k = 0{,}95$.

N° 20.

# *Projet d'un objectif astronomique visuel à grande ouverture relative*

*par M. A. Biot* (1)

sont déterminés, en fonction des propriétés des matières employées, par la fixation de la distance focale et les conditions de correction des trois aberrations primaires : chromatisme sur l'axe, aberration sphérique sur l'axe et dans le voisinage de l'axe. Les épaisseurs des lentilles dépendent des rayons ainsi déterminés et des conditions de rigidité qui leur sont imposées. L'entre-verre est parfois réglé pour agir sur certaine correction chromatique.

Aucun arbitraire ne reste ainsi disponible pour des corrections supplémentaires, en particulier pour la correction des aberrations zonales de sphéricité, si ce n'est dans le choix des matières, ce qui est peu efficace dans le problème particulier indiqué. Il en résulte qu'en général les objectifs astronomiques sont ouverts seulement à F/10 (maximum très rarement atteint), à F/20 et moins encore, la moyenne variant de F/12 à F/15. Dans certains types, pour lesquels des matières peu avantageuses sont imposées (objectifs à spectre secondaire réduit), l'ouverture ne dépasse guère F/18.

L'augmentation de l'ouverture relative est donc, évidemment, hautement désirable.

**2.** *La solution proposée.* — Ce problème ne peut guère se résoudre, d'après ce qui précède, qu'en compliquant, d'une manière à priori quelconque, le type décrit. On peut déformer les surfaces — c'est ce qu'a fait Scharzschild — mais c'est un procédé

(1) Annales de la Société scientifique de Bruxelles, t. 44 (1925), p. 328 de la deuxième partie.

coûteux. On peut ajouter des lentilles, et c'est dans ce sens que nous nous proposons de rechercher une solution ; toutefois le procédé n'est avantageux que si les lentilles ajoutées sont de petit diamètre relativement aux lentilles primitives et c'est ce que nous nous efforcerons de réaliser.

Notre point de départ sera la remarque suivante, bien connue : l'objectif photographique Petzval — composé de deux groupes, séparément achromatiques, de deux lentilles — est d'un type tel que ses aberrations zonales sont faibles. Est-il possible de construire un objectif visuel à deux composants achromatiques, du type Petzval ou d'un type différent, ayant également des aberrations zonales faibles et dans lequel le second groupe de lentilles est de petit diamètre.

Tel est le problème que nous allons étudier.

Nous rechercherons aujourd'hui les formules qui nous ser-

1. *Le problème.* — Le type normal d'objectif astronomique visuel est composé de deux lentilles – crown et flint — placées à une faible distance l'une de l'autre. Les 4 rayons de courbure viront à faire cette étude. Dans une note prochaine nous traiterons des applications numériques de ces formules. Ces dernières, relatives aux seules aberrations du 3e ordre, ne déterminent, bien entendu, que des éléments d'avant-projet ; il faudra, lors de chaque essai, recourir aux calculs trigonométriques rigoureux pour déterminer les éléments définitifs et en particulier pour vérifier la grandeur des aberrations zonales qui dépendent surtout des termes d'ordre supérieur.

Remarquons encore que si, dans un Petzval ordinaire, le diamètre du groupe arrière de lentilles est du même ordre de grandeur que celui du premier groupe, cela provient de l'amplitude du champ représenté, qui peut atteindre parfois plus de 10° de chaque côté de l'axe. Dans un objectif pour l'observation visuelle le champ employé reste presque toujours plus petit que 1° de chaque côté de l'axe : d'où une diminution importante du diamètre utile du second groupe. Il y a plus. Un objectif visuel ne devant pas posséder un champ plan, il est hautement probable que l'on pourra séparer davantage — par rapport au Petzval —

les deux groupes dont il sera composé : second motif de diminution de diamètre pour le dernier de ces groupes.

**3**. *Remarques sur les formules à établir.* — Nous nous proposons en première ligne l'établissement de formules donnant les rayons de l'avant-projet d'un objectif visuel de distance focale égale à l'unité, achromatique, corrigé ou à peu près des aberrations sphériques du 3e ordre sur l'axe et hors de l'axe — cet objectif étant composé de deux groupes largement distants et séparément achromatiques, cette dernière condition étant imposée par la précédente.

Nos conditions sont au nombre de 4. Or, nous avons à déterminer 8 rayons de courbure ; 4 rayons restent arbitraires qu'il faudra déterminer par des conditions de commodité.

Afin de conserver à nos formules la plus grande généralité possible, nous supposerons, pour les établir, que le point objet n'est pas à l'infini, mais en un point quelconque de l'axe optique du système.

**4**. *Formules au foyer et à l'achromatisme.* — Représentons par $F_1$, $F_5$ les distances focales de chacun des deux groupes ;
$f_1$ , $f_3$
$f_5$ , $f_7$ les distances focales des lentilles de chaque groupe ;
$\Phi_1$ , $\Phi_5$ , $\varphi_1$ , $\varphi_3$ , $\varphi_5$ , $\varphi_7$ les inverses de ces quantités ;
$\nu_1$ , $\nu_3$ , $\nu_5$ , $\nu_7$ les constringences des verres employés,

de la distance $d$ des deux groupes supposés chacun sans épaisseur. La distance focale de l'ensemble et la réalisation de l'achromatisme se déterminent par les conditions

$$\Phi_1 + \Phi_5 - d\varphi_1\varphi_5 = 1$$

$$\varphi_1 + \varphi_3 = \Phi_1 \qquad \varphi_5 + \varphi_7 = \Phi_5$$

$$\varphi_1 = \frac{\nu_1}{\nu_1 - \nu_3}\Phi_1 \qquad \varphi_5 = \frac{\nu_5}{\nu_5 - \nu_7}\Phi_5$$

$$\varphi_3 = \frac{\nu_3}{\nu_1 - \nu_3}\Phi_1 \qquad \varphi_7 = \frac{\nu_7}{\nu_5 - \nu_7}\Phi_5$$

5. *Formule pour la suppression de l'aberration sphérique sur l'axe.* — Nous suivrons le mode de raisonnement appliqué par TURRIÈRE dans sa Note à son *Optique industrielle*. Toutefois, en ce qui concerne les signes des abscisses, nous adopterons la règle ordinaire : une abscisse est comptée à partir de la surface correspondante, positivement dans le sens du parcours de la lumière ; un rayon de courbure est positif si la surface correspondante reçoit la lumière sur sa convexité, négatif dans le cas contraire.

Nous désignons par

$R_1$ , $R_2$ ... les rayons successifs ;
$s$ , $s'$ ... les abscisses successives des points objet et images ;
$n'$ , $n'''$ ... les indices successifs des lentilles ; si l'on trouve dans les formules l'indice $n''$ par exemple, il n'est écrit que pour la symétrie des formules et vaut 1 ;
$\theta_1$ , $\theta_2$ ... les invariants d'Abbe.

Écrivons d'abord quelques relations qui nous serviront dans la suite.

On a, par définition :

$$\theta_1 = \frac{1}{R_1} - \frac{1}{s} = n'\left(\frac{1}{R'} - \frac{1}{s'}\right)$$

. . . . . .

$$\theta_5 = \frac{1}{R_5} - \frac{1}{s^{v} - d} = n^{v}\left(\frac{1}{R_5} - \frac{1}{s^{v}}\right)$$

d'où, en éliminant les R,

$$\frac{1}{s'} = \frac{1}{s} + \theta_1\left(1 - \frac{1}{n'}\right)$$

$$\frac{1}{s''} = \frac{1}{s} - (\theta_1 - \theta_2)\left(1 - \frac{1}{n'}\right) = \frac{1}{s^{IV}} + \theta_4\left(1 - \frac{1}{n'''}\right)$$

$$\frac{1}{s'''} = \frac{1}{s^{IV}} + \theta_4\left(1 - \frac{1}{n'''}\right)$$

. . . . . .

D'autre part, en éliminant les R des formules de Gauss qui donnent les φ, il vient :

$$\varphi_1 = \frac{n'-1}{n'}(\theta_1-\theta_2) \qquad \varphi_5 = \frac{n^{V}-1}{n^{V}}(\theta_5-\theta_6)$$

$$\varphi_3 = \frac{n'''-1}{n'''}(\theta_3-\theta_4) \qquad \varphi_7 = \frac{n^{VII}-1}{n^{VII}}(\theta_7-\theta_8)$$

Posons encore, pour définir $\lambda_1$ et $\lambda_2$, les relations immédiates

$$\lambda_1 = \frac{1}{s} + \varphi_1 = \frac{1}{s^{IV}} - \varphi_3$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{s^{IV}-d} + \varphi_5 = \frac{1}{s^{VIII}} - \varphi_7.$$

Venons-en maintenant au calcul proprement dit.

Les relations d'Abbe, aux coefficients d'aberration sphérique $a$ sont :

$$\frac{2na}{s_4} + \frac{\theta^2_1}{ns} = \frac{2n'a'}{s'^4} + \frac{\theta^2_1}{n's'}$$

. . . . . .

$$\frac{2n^{IV}a^{IV}}{(s'^{V}-d)^4} + \frac{\theta^2_5}{n^{IV}(s^{IV}-d)} = \frac{2n^{V}a^{V}}{s^{V4}} + \frac{\theta^2_5}{n^{V}s^{V}}$$

. . . . . .

Ajoutant membre à membre, il vient, par application des relations précédentes,

$$\frac{2a^{VIII}}{s^{VIII4}} = \left(\frac{s^{IV}}{s^{IV}-d}\right)^4(\theta^2_1\alpha_1+\theta^2_2\alpha_2+\theta^2_3\alpha_3+\theta^2_4\alpha_4)+\theta^2_5\alpha_5+\theta^2_6\alpha_6 + \theta^2_7\alpha^4+\theta^2_8\alpha_8$$

formule dans laquelle les α ont les valeurs suivantes, obtenues après quelques transformations :

$$\alpha_1 = \left(1-\frac{1}{n'}\right)\left(\frac{1}{s}-\frac{\theta_1}{n'}\right) \qquad \alpha_5 = \left(1-\frac{1}{n^{V}}\right)\left(\frac{1}{s^{IV}-d}-\frac{\theta_5}{n^{V}}\right)$$

$$\alpha_2 = \left(1-\frac{1}{n'}\right)\left(-\lambda_1+\frac{\theta_2}{n'}\right) \qquad \alpha_6 = \left(1-\frac{1}{n^{V}}\right)\left(\frac{\theta_6}{n^{V}}-\lambda_2\right)$$

$$\alpha_3 = \left(1-\frac{1}{n'''}\right)\left(\lambda_1-\frac{\theta_3}{n'''}\right) \qquad \alpha_7 = \left(1-\frac{1}{n^{VII}}\right)\left(\lambda_2-\frac{\theta_7}{n^{VII}}\right)$$

$$\alpha^4 = \left(1-\frac{1}{n^{iv}}\right)\left(\frac{\theta_4}{s^{IV}}-\frac{1}{s^{IV}}\right) \qquad \alpha_8 = \left(1-\frac{1}{n^{VII}}\right)\left(\frac{\theta_8}{n^{VII}}-\frac{1}{s^{VIII}}\right)$$

Il vient finalement et facilement :

$$-\frac{2a^{\mathrm{VIII}}}{s^{\mathrm{VIII}4}}=\left(\frac{s^{\mathrm{IV}}}{s^{\mathrm{IV}}-d}\right)^4\left[\theta^2{}_2\left(1+\frac{2}{n'}\right)\varphi_1+\theta^2{}_3\left(1+\frac{2}{n'''}\right)\varphi_3+\theta_2\varphi^2{}_1\frac{2n'+1}{n'-1}-\theta_3\varphi^2{}_3\frac{2n'''+1}{n'''-1}\right.$$

$$\left.+\frac{n'^2\varphi^3{}_1}{(n'-1)^2}+\frac{n'''^2\varphi^3{}_3}{(n'''-1)^2}+\lambda_1\right\}-2\theta_2\varphi_1-2\theta_3\varphi_3-\frac{n'\varphi^2{}_1}{n'-1}+\frac{n'''\varphi^2{}_3}{n'''-1}\left.\right\}\Bigg]$$

$$+\theta^2{}_6\left(1+\frac{2}{n^{\mathrm{V}}}\right)\varphi_5+\theta^2{}_7\left(1+\frac{2}{n^{\mathrm{VII}}}\right)\varphi_7+\theta_6\varphi^2{}_5\frac{2n^{\mathrm{V}}+1}{n^{\mathrm{V}}-1}-\theta_7\varphi^2{}_7\frac{2n^{\mathrm{VII}}+1}{n^{\mathrm{VII}}-1}+\frac{n_{\mathrm{V}}\varphi^3{}_5}{(n^{\mathrm{V}}-1)^2}$$

$$\left.+\frac{n^{\mathrm{VII}2}\varphi^3{}_7}{(n^{\mathrm{VII}}\ 1)^2}+\lambda_2\right\}-2\theta_6\varphi_5-2\theta_7\varphi_7-\frac{n^{\mathrm{V}}\varphi^2{}_5}{n^{\mathrm{V}}-1}-\frac{n^{\mathrm{VII}}\varphi^2{}_7}{n^{\mathrm{VII}}-1}\left.\right\}$$

ou, d'une manière abrégée :

$$-\frac{2a^{\mathrm{VIII}}}{s^{\mathrm{VIII}4}}=-\frac{2a^{\mathrm{IV}}}{s^{\mathrm{IV}4}}\left(\frac{s^{\mathrm{IV}}-d}{s^{\mathrm{IV}}}\right)^4+\boldsymbol{\Sigma}_2=\boldsymbol{\Sigma}_1+\boldsymbol{\Sigma}_2=\boldsymbol{\Sigma}$$

Si le système étudié doit être exempt d'aberration sphérique du 3e ordre, il faut que $\Sigma = 0$. Si, en même temps, $a^{\mathrm{IV}}$ doit être nul, c'est-à-dire si le premier groupe doit être lui-même corrigé pour cette aberration, il suffit d'écrire simultanément :

$$\Sigma_1 = 0, \qquad \Sigma_2 = 0,$$

équations que l'on aurait d'ailleurs pu écrire immédiatement, d'après Turrière.

**6.** *Formule pour la réalisation de la condition des sinus.*

Nous représenterons par $h_1$ et $h_2$ les hauteurs correspondantes d'intersection des deux groupes de lentilles par un même rayon lumineux; par $u$, $u'$ ... les inclinaisons successives de ce rayon sur l'axe ; par y, y' ... des éléments correspondants successifs perpendiculaires à l'axe, aux points objet et images considérés.

On a :

$$h^2{}_2 = h^2{}_1\,\frac{(s^{\mathrm{IV}}-d)^2}{s^{\mathrm{IV}2}}$$

Appliquons à chaque dioptre la formule établie par Blein dans son *Optique géométrique* (E. S., Doin, éditeur). Il vient :

$$n'y' \sin u' - ny \sin u = \frac{nyh_1}{s}\left[-\frac{1}{2}h^2{}_1\theta_1\alpha_1 - h^2{}_1\left(\frac{a'}{s'^3} - \frac{a}{s^3}\right)\right]$$

$$n''y'' \sin u'' - n'y' \sin u' = \frac{nyh_1}{s}\left[-\frac{1}{2}h^2{}_1\theta_2\alpha_2 - h^2{}_1\left(\frac{a''}{s''^3} - \frac{a'}{s'^3}\right)\right]$$

. . . . . .

$$n^{v}y^{v}\sin u^{v} - n^{iv}y^{iv}\sin u^{iv} = \frac{nyh_1}{s}\left[-\frac{1}{2}h_2\theta_5\alpha_5 - h^2{}_2\left(\frac{a^{v}}{s^{v3}} - \frac{a^{iv}}{(s^{iv}-d)^3}\right)\right]$$

. . . . . .

Les lettres ont, dans ces relations, le même sens qu'au paragraphe précédent.

Ajoutant membre et membre et transformant, il vient finalement :

$$n^{viii}y^{viii}\sin u^{viii} - ny \sin u =$$

$$-h^2{}_1\frac{nyh_1}{s}\left[-\theta_2\varphi_1\left(1+\frac{1}{n'}\right) - \theta_3\varphi_3\left(1+\frac{1}{n'''}\right) - \frac{n'\varphi^2{}_1}{n'-1} + \frac{n'''\varphi^2{}_3}{n'''-1} + \lambda_1(\varphi_1+\varphi_3)\right.$$

$$\left.+\left(\frac{s^{iv}-d}{s^{iv}}\right)^2\sum{}_2 - \frac{2a^{iv}}{s^{iv4}}\frac{s^{iv}\times d}{s^{iv}-d} + \frac{2a^{viii}}{s^{viii4}}\left(\frac{s^{iv}-d}{s^{iv}}\right)^2 s^{viii}\right]$$

formule dans laquelle $\Sigma_2$ représente une somme analogue à celle des termes qui précèdent mais où les indices des deux sortes sont augmentés de 4.

En principe $a^{viii}$ est nul. La formule se simplifie d'autant.

Si $a^{iv}$ n'est pas nul, on tire sa valeur des calculs du paragraphe précédent et on remplace.

Si la condition des sinus doit être réalisée, il faut, dans chacun des cas qui précèdent, que la quantité entre crochets soit nulle. Cette condition s'écrit donc :

$$\theta_2\varphi_1\left(1+\frac{1}{n'}\right) + \theta_3\varphi_3\left(1+\frac{1}{n'''}\right) + \frac{n'\varphi^2{}_1}{n-1} - \frac{n'''\varphi^2{}_3}{n'''-1} + \lambda_1(\varphi_1\varphi_3)$$

$$+\left(\frac{s^{iv}-d}{s^{iv}}\right)^2\sum{}_2 - \frac{2a^{iv}}{s^{iv4}}\frac{s^{iv}\times d}{s^{iv}-d} = 0$$

en supposant $a^{viii} = 0$.

7. *Remarques.* — Les formules qui précèdent sont applicables à la reproduction aplanétique d'un point de l'axe d'un système optique composé de deux groupes achromatiques. Elles s'appliquent donc au cas de l'objectif de microscope faible plongé dans l'air.

Quand on veut les appliquer au cas d'un point objet situé à l'infini, il faut y faire $\lambda_1 = \varphi_1$.

Les inconnues en surnombre sont déterminées par des conditions telles que les suivantes : $a^{IV} = 0$ ; égalité de deux rayons consécutifs appartenant ou non à une même lentille, etc.

Ces formules seraient généralisées, sans difficulté, pour un nombre plus grand de groupes.

Il se peut que l'on doive laisser dans l'objectif des résidus d'aberrations du 3e ordre qui seront corrigés par les aberrations d'ordre supérieur. Ces résidus s'introduisent facilement soit par l'adjonction de petits termes aux équations précédentes, soit lors des tâtonnements trigonométriques.

8. *Résumé.* — On se pose la question suivante : est-il possible et avantageux de réaliser un objectif astronomique visuel à grande ouverture relative à deux groupes doubles achromatiques du type de l'objectif photographique Petzval ou d'un type différent ? On établit les formules qui permettent d'étudier la question. Sous la forme générale qui leur est donnée, ces formules sont applicables à la détermination des éléments d'un objectif faible du microscope à deux groupes achromatiques.

N° 21.

# *L'Aberration des fixes et l'Aberration planétaire,*

*par M. M. Alliaume* (1).

**1.** On admet l'existence d'un système de repère par rapport auquel la lumière se meut en ligne droite et avec la même vitesse V dans toutes les directions. On adopte des axes de coordonnées solidaires de ce système de repère.

Par rapport à ces axes, le lieu terrestre d'observation, M, a des coordonnées $\xi_1$, $\xi_2$, $\xi_3$ à l'instant $t$, et les coordonnées de la source lumineuse, S, sont $x_1$, $x_2$, $x_3$ au même instant. A cet instant, la droite MS a pour cosinus directeurs

$$\Gamma_1 = \frac{x_1 - \xi_1}{\sqrt{\Sigma(x-\xi)^2}}, \quad \Gamma_2 = \frac{x_2 - \xi_2}{\sqrt{\Sigma(x-\xi)^2}}, \quad \Gamma_3 = \frac{x_3 - \xi_3}{\sqrt{\Sigma(x-\xi)^2}}$$

où les coordonnées $x$ et $\xi$ sans indice doivent être lues comme munies d'un indice de sommation.

Dans une observation de la source lumineuse faite à l'instant $t$ au point $\xi_1$, $\xi_2$, $\xi_3$, on appelle $\gamma_1$, $\gamma_2$, $\gamma_3$ les cosinus directeurs de la ligne de visée vraie, et $c_1$, $c_2$, $c_3$ les cosinus directeurs de la ligne de visée apparente.

Les cosinus directeurs de même rang des deux groupes $(\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3)$ et $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ diffèrent par des termes qui sont de l'ordre des rapports des dérivées $\frac{d\xi}{dt}$ à la vitesse V de la lumière. Dans les deux groupes $(c_1, c_2, c_3)$ et $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$, les différences

---

(1) Académie royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique (*Bulletin de la Classe des Sciences*, 2e sér., t. XI [1925], p. 167).

des éléments correspondants sont de l'ordre des rapports des dérivées $\frac{dx}{dt}$ à la même vitesse V. Pratiquement, ces rapports sont des quantités petites du premier ordre, et l'approximation adoptée est celle dans laquelle les termes petits du deuxième ordre sont considérés comme négligeables.

L'aberration de la lumière est un phénomène du premier ordre. Toutes les théories optiques sont d'accord en ce qui concerne les phénomènes de cet ordre : ce n'est que pour fixer les idées que, ci dessus, a été faite l'hypothèse d'un système de repère par rapport auquel la lumière se meut en ligne droite et avec la même vitesse dans toutes les directions.

**2.** La vitesse V de la lumière est connue, ainsi que les équations du mouvement de la source lumineus

$$\xi_1 = \xi_1(t), \qquad \xi_2 = \xi_2(t), \qquad \xi_3 = \xi_3(t)$$

et du lieu d'observation

$$x_1 = x_1(t), \qquad x_2 = x_2(t), \qquad x_3 = x_3(t).$$

On propose un instant $t$. On demande les cosinus directeurs $(c_1, c_2, c_3)$ de la ligne de visée apparente, et les cosinus directeurs $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ de la ligne de visée vraie à cet instant.

Si V' est la vitesse apparente de la lumière à l'instant $t$ au lieu d'observation, et $(t - \theta)$ l'instant d'émission de l'onde lumineuse reçue par l'observateur à l'instant $t$, on a les équations d'aberration

$$V\gamma_1 = V'c_1 - \frac{d\xi_1}{dt},$$

$$V\gamma_2 = V'c_2 - \frac{d\xi_2}{dt},$$

$$V\gamma_3 = V'c_3 - \frac{d\xi_3}{dt},$$

avec les identités

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1,$$
$$c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = 1,$$

ainsi que l'équation du temps de parcours de la lumière

$$\theta = \frac{\sqrt{\Sigma (x' - \xi)^2}}{V}$$

et les égalités

$$\frac{x'_1 - \xi_1}{\gamma_1} = \frac{x'_2 - \xi_2}{\gamma_2} = \frac{x'_3 - \xi_3}{\gamma_3},$$

dans lesquelles on a, pour abréger, utilisé les notations

$$x'_1 = x_1 (t - \theta), \quad x'_2 = x_2 (t - \theta), \quad x'_3 = x_3 (t - \theta).$$

Les égalités ci-dessus constituent un système de huit équations aux huit inconnues

$$\gamma_1, \ \gamma_2, \ \gamma_3, \ c_1, \ c_2, \ c_3, \ V', \ \theta.$$

L'élimination de V' entre les quatre premières laisse, à l'approximation convenue,

$$\left.\begin{aligned} \gamma_1 &= c_1 + c_1 \Sigma \frac{c}{V} \frac{d\xi}{dt} - \frac{1}{V} \frac{d\xi_1}{dt}, \\ \gamma_2 &= c_2 + c_2 \Sigma \frac{c}{V} \frac{d\xi}{dt} - \frac{1}{V} \frac{d\xi_2}{dt}, \\ \gamma_3 &= c_3 + c_3 \Sigma \frac{c}{V} \frac{d\xi}{dt} - \frac{1}{V} \frac{d\xi_3}{dt}. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Les premiers membres de ces formules pourraient être remplacés par les cosinus directeurs ($\Gamma_1$, $\Gamma_2$, $\Gamma_3$) de la droite lieu d'observation — source lumineuse si ce dernier point était immobile par rapport aux axes de repère. On admet qu'il en est ainsi pour les étoiles, et les formules

$$\left.\begin{aligned} \Gamma_1 &= c_1 + c_1 \Sigma \frac{c}{V} \frac{d\xi}{dt} - \frac{1}{V} \frac{d\xi_1}{dt}, \\ \Gamma_2 &= c_2 + c_2 \Sigma \frac{c}{V} \frac{d\xi}{dt} - \frac{1}{V} \frac{d\xi_2}{dt}, \\ \Gamma_3 &= c_3 + c_3 \Sigma \frac{c}{V} \frac{d\xi}{dt} - \frac{1}{V} \frac{d\xi_3}{dt} \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

conviennent pour la correction d'aberration des fixes.

L'élimination de $\gamma_1$, $\gamma_2$, $\gamma_3$ entre les équations (1) et les équations non utilisées du système primitif (sauf l'équation en $\theta$ explicite) fournit, à l'approximation convenue, les égalités suivantes :

$$\left.\begin{aligned} c_1 &= \frac{x_1' - \xi_1}{\sqrt{\Sigma(x'-\xi)^2}} - \frac{x_1' - \xi_1}{\sqrt{\Sigma(x'-\xi)^2}} \Sigma \frac{x'-\xi}{\sqrt{\Sigma(x'-\xi)^2}} \frac{1}{V}\frac{d\xi}{dt} + \frac{1}{V}\frac{d\xi_1}{dt}, \\ c_2 &= \frac{x_2' - \xi_2}{\sqrt{\Sigma(x'-\xi)^2}} - \frac{x_2' - \xi_2}{\sqrt{\Sigma(x'-\xi)^2}} \Sigma \frac{x'-\xi}{\sqrt{\Sigma(x'-\xi)^2}} \frac{1}{V}\frac{d\xi}{dt} + \frac{1}{V}\frac{d\xi_2}{dt}, \\ c_3 &= \frac{x_3' - \xi_3}{\sqrt{\Sigma(x'-\xi)^2}} - \frac{x_3' - \xi_3}{\sqrt{\Sigma(x'-\xi)^2}} \Sigma \frac{x'-\xi}{\sqrt{\Sigma(x'-\xi)^2}} \frac{1}{V}\frac{d\xi}{dt} + \frac{1}{V}\frac{d\xi_3}{dt}, \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

desquelles il reste à faire disparaître $\theta$, qui s'y trouve par les coordonnées $(x_1', x_2', x_3')$.

Eu égard à l'équation du temps de parcours, la première (par exemple) des équations (3) peut s'écrire

$$c_1 = \frac{x_1' - \xi_1}{V\theta} - \frac{x_1' - \xi_1}{V\theta} \Sigma \frac{x'-\xi}{V\theta} \frac{1}{V}\frac{d\xi}{dt} + \frac{1}{V}\frac{d\xi_1}{dt}.$$

Par le développement en série de chacun des $x_i'$ suivant les puissances croissantes de $\theta$,

$$x_i' - \xi_i = x_i - \xi_i - \theta \frac{dx_i}{dt} + \frac{1}{2}\theta^2 \frac{d^2x_i}{dt^2} - \frac{1}{6}\theta^3 \frac{d^3x_i}{dt^3} + \cdots$$

et

$$\frac{x_i' - \xi_i}{V\theta} = \frac{x_i - \xi_i}{V\theta} - \frac{1}{V}\frac{dx_i}{dt} + \frac{1}{2}\frac{\theta}{V}\frac{d^2x_i}{dt^2} - \frac{1}{6}\frac{\theta^2}{V}\frac{d^3x_i}{dt^3} + \cdots,$$

expression dont chaque terme a une valeur numérique indépendante des unités adoptées.

Sous réserve d'une discussion ultérieure, admettons que les dérivées successives $\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{V}\frac{dx_i}{dt}\right)$, $\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{1}{V}\frac{dx_i}{dt}\right)$, ..., multipliées respectivement par $\theta$, $\theta^2$, ..., constituent des termes négligeables à l'approximation convenue : le développement ci-dessus se réduit à ses deux premiers termes.

D'autre part, l'équation du temps de parcours s'écrit alors

$$\Sigma\left(\frac{x-\xi}{V\theta}-\frac{1}{V}\frac{dx}{dt}\right)^2=1$$

et montre que $\frac{\sqrt{\Sigma(x-\xi)^2}}{V\theta}$ est de la forme $(1+k)$, où $k$ est une quantité petite de premier ordre; d'où, après substitution, la valeur de $k$, et, tous calculs faits, le résultat :

$$\frac{x_i'-\xi_i}{V\theta}=\frac{x_i-\xi_i}{\sqrt{\Sigma(x-\xi)^2}}+\frac{x_i-\xi_i}{\sqrt{\Sigma(x-\xi)^2}}\Sigma\frac{x-\xi}{\sqrt{\Sigma(x-\xi)^2}}\frac{1}{V}\frac{dx}{dt}-\frac{1}{V}\frac{dx_i}{dt}.$$

Cette dernière valeur est celle du terme non petit de $c_i$. Quant aux termes petits, il est conforme à l'approximation convenue d'y remplacer chaque $\frac{x_i'-\xi_i}{V\theta}$ par son terme non petit. Finalement :

$$\left.\begin{aligned}
&=\frac{x_1-\xi_1}{\sqrt{\Sigma(x-\xi)^2}}-\frac{x_1-\xi_1}{\sqrt{\Sigma(x-\xi)^2}}\Sigma\frac{x-\xi}{\sqrt{\Sigma(x-\xi)^2}}\frac{1}{V}\left(\frac{d\xi}{dt}-\frac{dx}{dt}\right)+\frac{1}{V}\left(\frac{d\xi_1}{dt}-\frac{dx_1}{dt}\right),\\
&=\frac{x_2-\xi_2}{\sqrt{\Sigma(x-\xi)^2}}-\frac{x_2-\xi_2}{\sqrt{\Sigma(x-\xi)^2}}\Sigma\frac{x-\xi}{\sqrt{\Sigma(x-\xi)^2}}\frac{1}{V}\left(\frac{d\xi}{dt}-\frac{dx}{dt}\right)+\frac{1}{V}\left(\frac{d\xi_2}{dt}-\frac{dx_2}{dt}\right),\\
&=\frac{x_3-\xi_3}{\sqrt{\Sigma(x-\xi)^2}}-\frac{x_3-\xi_3}{\sqrt{\Sigma(x-\xi)^2}}\Sigma\frac{x-\xi}{\sqrt{\Sigma(x-\xi)^2}}\frac{1}{V}\left(\frac{d\xi}{dt}-\frac{dx}{dt}\right)+\frac{1}{V}\left(\frac{d\xi_3}{dt}-\frac{dx_3}{dt}\right).
\end{aligned}\right\}\quad(4)$$

Telles sont les expressions des cosinus directeurs de la ligne de visée apparente. Les cosinus directeurs de la ligne de visée vraie s'obtiendront par substitution (1) des résultats qui viennent d'être obtenus en (4) :

$$\left.\begin{aligned}
\gamma_1&=\frac{x_1-\xi_1}{\sqrt{\Sigma(x-\xi)^2}}+\frac{x_1-\xi_1}{\sqrt{\Sigma(x-\xi)^2}}\Sigma\frac{x-\xi}{\sqrt{\Sigma(x-\xi)^2}}\frac{1}{V}\frac{dx}{dt}-\frac{1}{V}\frac{dx_1}{dt},\\
\gamma_2&=\frac{x_2-\xi_2}{\sqrt{\Sigma(x-\xi)^2}}+\frac{x_2-\xi_2}{\sqrt{\Sigma(x-\xi)^2}}\Sigma\frac{x-\xi}{\sqrt{\Sigma(x-\xi)^2}}\frac{1}{V}\frac{dx}{dt}-\frac{1}{V}\frac{dx_2}{dt},\\
\gamma_3&=\frac{x_3-\xi_3}{\sqrt{\Sigma(x-\xi)^2}}+\frac{x_3-\xi_3}{\sqrt{\Sigma(x-\xi)^2}}\Sigma\frac{x-\xi}{\sqrt{\Sigma(x-\xi)^2}}\frac{1}{V}\frac{dx}{dt}-\frac{1}{V}\frac{dx_3}{dt}.
\end{aligned}\right\}\quad(5)$$

Ces cosinus directeurs de la ligne de visée vraie se montrent indépendants du mouvement de l'observateur, comme il était nécessaire.

**3.** Dans la pratique, on connaît les cosinus directeurs $(c_1, c_2, c_3)$ de la ligne de visée apparente à l'instant $t$, et l'on doit calculer les cosinus directeurs $(\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3)$ de la droite lieu d'observation, source lumineuse au même instant.

Dans les premiers termes et dans divers facteurs des deuxièmes termes des expressions (5) de $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$, on reconnaît les cosinus directeurs demandés $(\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3)$, et ces équations (5), résolues à l'approximation actuelle par rapport à $(\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3)$, fournissent les formules

$$\left\{\begin{aligned}
\Gamma_1 &= c_1 + c_1 \sum \frac{c}{V}\left(\frac{d\xi}{dt} - \frac{dx}{dt}\right) - \frac{1}{V}\left(\frac{d\xi_1}{dt} - \frac{dx_1}{dt}\right),\\
\Gamma_2 &= c_2 + c_2 \sum \frac{c}{V}\left(\frac{d\xi}{dt} - \frac{dx}{dt}\right) - \frac{1}{V}\left(\frac{d\xi_2}{dt} - \frac{dx_2}{dt}\right),\\
\Gamma_3 &= c_3 + c_3 \sum \frac{V}{c}\left(\frac{d\xi}{dt} - \frac{dx}{dt}\right) - \frac{1}{V}\left(\frac{d\xi_3}{dt} - \frac{dx_3}{dt}\right),
\end{aligned}\right. \qquad (6)$$

qui donnent les corrections d'aberration dans le cas le plus général, superposition de l'aberration des fixes et (pratiquement) de l'aberration planétaire. Dans leur emploi, il est conforme à l'approximation convenue que les équations du mouvement de l'astre observé ne soient connues qu'aux termes petits du second ordre près.

**4.** Les formules (6), en particulier, ne sont légitimes que pour autant que les quantités

$$\frac{1}{2}\frac{\theta}{V}\frac{d^2x_i}{dt^2}, \qquad \frac{1}{6}\frac{\theta^2}{V}\frac{d^3x_i}{dt^3}, \ldots$$

sont d'un ordre de petitesse supérieur au premier.

Le milieu par rapport auquel la lumière se meut en ligne droite et avec la même vitesse dans toutes les directions est sensiblement confondu avec l'ensemble des étoiles; et la discussion ne doit pratiquement porter que sur le cas où les $(x_1, x_2, x_3)$ sont les coordonnées d'une planète.

L'observateur terrestre est lui-même entraîné dans un mouvement planétaire, et il est légitime d'adopter dans ce calcul (comme dans celui des termes d'aberration annuelle, et pour les mêmes raisons) des axes se coupant au centre du Soleil et qui ne sont que constamment parallèles à ceux par rapport auxquels la lumière se meut en ligne droite et avec la même vitesse dans toutes les directions, tout en gardant pour cette vitesse la constante V.

Comme il ne s'agit que d'un calcul d'ordres de grandeur, il est suffisant de considérer la trajectoire de chaque planète comme circulaire, décrite dans le plan des $x_1 x_2$. Enfin, chaque dérivée $\frac{d^n x_i}{dt^n}$ sera remplacée par la résultante des deux dérivées de même ordre $\left(\frac{d^n x_1}{dt^n}, \frac{d^n x_2}{dt^n}\right)$ et recevra ainsi la plus grande valeur qu'elle prend le long de la trajectoire planétaire.

Dans ces conditions, si $a$ désigne le rayon de l'orbite planétaire, $a_t$ le rayon de l'orbite terrestre et $T_t$ la durée de la révolution de la Terre par rapport à l'ensemble des étoiles, et eu égard à la loi qui lie les durées des révolutions planétaires et les axes des orbites, le terme général (en valeur absolue)

$$\frac{1}{n!}\,\frac{\theta^{n-1}}{V}\,\frac{d^n x_i}{dt^2},$$

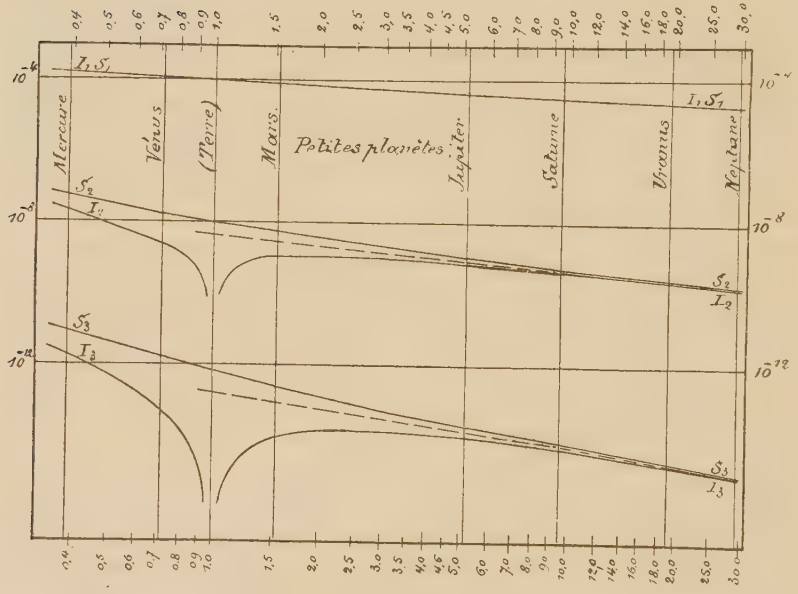
indépendant des unités de longueur et de temps, doit être compté pour

$$\frac{(2\pi)^n}{n!}\,\frac{\theta^{n-1}}{V}\left(a_t : T_t^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3n}{2}}\, a^{-\frac{3n-2}{2}}.$$

Quant à $\theta$, ses valeurs extrêmes sont $\frac{|a_t \pm a|}{V}$, et les valeurs extrêmes correspondantes du terme général étudié sont

$$I_n = \frac{(2\pi)^n}{n!} \frac{|a_t - a|^{n-1}}{V^n} \left(a_t : T_t^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3n}{2}} a^{-\frac{3n-2}{2}},$$

$$S_n = \frac{(2\pi)^n}{n!} \frac{(a_t + a)^{n-1}}{V^n} \left(a_t : T_t^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3n}{2}} a^{-\frac{3n-2}{2}}.$$




Ces valeurs extrêmes ont été calculées par les formules suivantes pour les diverses planètes, et pour $n = 1, 2, 3$ :

$$\log R = \bar{5},99590,$$

$$\log M_n = n \log R + \operatorname{colog} n! + \frac{3n-2}{2} \operatorname{colog} \frac{a}{a_t},$$

$$\log I_n = \log M_n + (n-1) \log \left| 1 - \frac{a}{a_t} \right|,$$

$$\log S_n = \log M_n + (n-1) \log \left( 1 + \frac{a}{a_t} \right).$$

Voici les résultats de ces calculs :

**1. — Valeurs extrêmes inférieures $I_n$.**

| | $n=1$ | $n=2$ | $n=3$ |
|---|---|---|---|
| Mercure . . . | $10^{-4}$ . 1,592 | $10^{-8}$ . 2,007 | $10^{-12}$ . 1,683 |
| Vénus. . . . | 1,165 | 0,259 | 0,039 |
| Mars . . . . | 0,802 | 0,111 | 0,010 |
| Jupiter . . . | 0,434 | 0,076 | 0,009 |
| Saturne . . . | 0,320 | 0,046 | 0,004 |
| Uranus . . . | 0,226 | 0,024 | 0,002 |
| Neptune . . . | 0,180 | 0,016 | 0,001 |

**2. — Valeurs extrêmes inférieures $S_n$.**

| | $n=1$ | $n=2$ | $n=3$ |
|---|---|---|---|
| Mercure . . . | $10^{-4}$ . 1,592 | $10^{-8}$ . 4,542 | $10^{-12}$ . 8,637 |
| Vénus. . . . | 1,165 | 1,616 | 1,495 |
| Mars . . . . | 0,802 | 0,533 | 0,236 |
| Jupiter . . . | 0,434 | 0,112 | 0,019 |
| Saturne . . . | 0,320 | 0,057 | 0,007 |
| Uranus . . . | 0,226 | 0,027 | 0,002 |
| Neptune . . | 0,180 | 0,017 | 0,001 |

Pour $n = 1$, les valeurs extrêmes inférieure et supérieure sont confondues, comme il était nécessaire.

Les formules ainsi mises en œuvre perdent leur signification pour $a = a_t$, c'est-à-dire dans le cas où la planète considérée est la Terre elle-même. Les résultats numériques obtenus dans cette hypothèse se rapportent à une autre planète qui décrirait la même orbite que la Terre. Les valeurs minima sont nécessairement nulles, et les valeurs maxima sont

$$S_1 = 10^{-4} . 0{,}991, \quad S_2 = 10^{-8} . 0{,}981, \quad S_3 = 10^{-12} . 0{,}648.$$

La figure ci-jointe porte les courbes $\log S_n$ et $\log I_n$ en fonction de $\log \frac{a}{a_t}$; les axes ont été gradués en $\frac{a}{a_t}$ et en parties aliquotes de l'unité de $S_n$, $I_n$. Les logarithmes des nombres ci-dessus s'y retrouvent comme ordonnées des points des courbes tracées, le long des parallèles à l'axe des $(S_n, I_n)$ relatives aux diverses planètes.

Le tracé des courbes a été mieux assuré par le calcul des coordonnées de quelques points supplémentaires, en particulier dans le voisinage de la Terre, intérieurement et extérieurement à son orbite, et dans la région des petites planètes.

La ligne unique $(\log S_1, \log I_1)$ est nécessairement une droite. Les ordonnées $(\log S_2, \log I_2)$, $(\log S_3, \log I_3)$ tendent deux à deux l'une vers l'autre pour des planètes de plus en plus éloignées du Soleil. Les lignes correspondantes ont deux à deux une asymptote commune dans le sens des éloignements croissants, à savoir

$$(\log S_2, \log I_2) = \bar{9},69077 - \log \frac{a}{a_t},$$

$$(\log S_3, \log I_3) = \overline{13},20954 - \frac{3}{2} \log \frac{a}{a_t};$$

ce sont les droites dessinées en traits interrompus.

D'autre part, sans qu'une théorie générale soit nécessaire, on voit fort bien l'allure que prennent ces résultats pour des valeurs de plus en plus grandes de $n$.

Les quantités définies du premier ordre de petitesse sont voisines de $10^{-4}$, et les quantités dont on avait admis qu'elles étaient d'un ordre supérieur sont, en effet, de l'ordre de $10^{-8}$, $10^{-12}$, ....

La théorie ci-dessus et en particulier les formules de correction (6) sont donc applicables, dans d'excellentes conditions, aux observations planétaires.

---

Marcel Hayez, imprimeur, rue de Louvain, 112, Bruxelles.

N° 22.

# *Revue annuelle d'Astronomie*
# *1924*

*par M. M. Alliaume* (1)

—

Sommaire (*)

La Terre. — *Rotation de la Terre :* expérience de Michelson; rotation de la Terre par rapport au milieu optique, de la même manière que par rapport à l'ensemble des étoiles. — *Variation des latitudes :* commission de la variation des latitudes des Unions internationales ; polhodie jusque fin 1922 ; critique du calcul des moyennes par dixièmes d'année. — *La raie verte de l'aurore boréale :* bombardement cathodique de l'azote atmosphérique en poussières cristallines controverses.

Soleil. — *Pression à la surface du Soleil :* la pression mesurée par l'étude du spectre ; difficultés ; méthodes diverses ; conclusion d'une pression très faible. — *Constitution de l'atmosphère solaire :* descriptions récentes de la chromosphère et de la couche renver-

(*) *Abréviations bibliographiques.* — R. A. = Cette *Revue annuelle d'Astronomie.* — R.Q.S. = Revue des Questions scientifiques (Louvain). — C. R. = Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences de Paris. — Pr. R. S. = Proceedings of the Royal Society, Series A, Mathematical and Physical Sciences (Londres). — M. N. = Monthly Notices of the Royal Astronomical Society (Londres). — P. M. = Philosophical Magazine (Londres). — Obs. = The Observatory (Londres). — B. A. A. = Journal of the British Astronomical Association (Londres), — Aph. J. = The Astrophysical Journal (Chicago). — P. A. = Popular Astronomy (Northfield, Minn.). — H.C.O. = Harvard College Observatory, *Circulaires, Bulletins, Annales* (Cambridge, Mass.). — A. N. = Astronomische Nachrichten (Kiel).

(1) Revue des Questions scientifiques, 4e série, t. 8 (1925, 2), p. 199.

sante ; éléments constituants ; circulation atmosphérique. — *Taches solaires :* période d'activité du Soleil ; champ magnétique des taches ; accouplement des taches ; loi de leur polarité magnétique.

Étoiles. — Températures et diamètres apparents ; température efficace et température optique ; résultats récents. — *Constitution et atmosphère des étoiles :* analyse spectrale des atmosphères solaires ; spectres de bandes ; les étoiles à zirconium ; pressions stellaires.

Structure de l'Univers. — *Les Nuées de Magellan :* distances et dimensions ; éclat des étoiles ; les étoiles les plus brillantes que l'on connaisse ; les nébuleuses de la grande Nuée.

## LA TERRE

**Rotation de la Terre.** — Le principe de l'inertie, principe fondamental de la Mécanique, peut s'exprimer de la manière suivante : il existe des axes de repère et une façon de compter le temps tels que, par rapport à ces axes et à cette façon de compter le temps, le mouvement d'un corps est d'autant plus voisin d'être rectiligne et uniforme que ce corps est plus éloigné de tout autre. S'il est vrai qu'il existe un pareil système d'axes de repère, il en existe une infinité, à savoir tous ceux qui ne possèdent par rapport au premier qu'un mouvement de translation rectiligne et uniforme ; s'il est vrai qu'il existe une pareille façon de compter le temps, une première pareille horloge, il en existe une infinité d'autres, à savoir toutes les horloges dont les lectures sont unies, à chaque instant, à la lecture sur la première au même instant, par une relation linéaire.

Les expériences dites « preuves mécaniques de la rotation de la Terre » démontrent que si l'on mesure le temps d'après une horloge réglée sur le mouvement des étoiles par rapport à la Terre, des axes fixés à celle-ci ne constituent pas un système de repère par rapport auquel se vérifie le principe de l'inertie ; positivement, ces expériences démontrent qu'un pareil système de repère est constitué par l'ensemble des étoiles : telles sont les expériences du pendule de Foucault et du barogyroscope de Gilbert. La Terre tourne par rapport aux étoiles, par rapport aux axes qui vérifient le principe de l'inertie ; en abrégé : la Terre tourne.

Quant à la Physique, elle admet qu'il existe un milieu par rapport auquel la lumière se meut en ligne droite et avec la même vitesse dans toutes les directions ; et la Physique non-relativiste ajoute : il n'en existe point d'autre. C'est le milieu optique, l'éther des physiciens (1). A l'approximation la plus satisfaisante que l'on puisse actuellement exiger, toutes les observations vérifient que ce milieu optique est l'un de ceux par rapport auxquels le principe de l'inertie est vrai, à savoir celui-là même par rapport auquel les étoiles sont, dans leur ensemble, immobiles. Cette vérification consiste en ce que les équations qui expriment les mouvements célestes les plus certains sont satisfaites lorsque les résultats des observations visuelles sont, avant d'y être introduits, corrigés de ces termes dits d'aberration, qui tiennent compte, précisément, du déplacement de l'observateur par rapport au milieu optique censé solidaire de l'ensemble des étoiles.

Or il existe une expérience capable de déceler un mouvement de rotation par rapport au milieu optique : c'est l'expérience de Sagnac (2). — Un disque circulaire horizontal (de 0,50 m. de diamètre) est susceptible de prendre un mouvement de rotation autour d'un axe vertical (jusque deux tours par seconde). Sur le disque se trouvent une source lumineuse (monochromatique), des miroirs verticaux convenablement orientés, une lame sans tain et un objectif photographique avec plaque sensible. Un faisceau de rayons lumineux se partage sur la lame en deux pinceaux, l'un réfléchi, l'autre transmis. De miroir en miroir, les deux pinceaux font, dans des sens inverses, le tour du disque, et, traversant l'objectif, viennent impressionner la plaque photographique. Lorsque le disque est immobile, les chemins parcourus par les deux pinceaux (par rapport à l'éther) sont égaux, et ceux-ci, atteignant la plaque en concordance de phase, l'impressionnent de la même manière. Lorsque le disque est en mouvement, il y a inégalité des chemins

(1) Voir *Astronomie et Relativité*, R.Q.S., 4e série, t. 6 (1924, 2), p. 472.

(2) G. Sagnac, *Un interféromètre en rotation uniforme*, C. R. t. 157 (1913, 2), p. 708 ; pour une bibliographie plus détaillée, voir *Astronomie et Relativité*, loc. cit., note précédente, p. 479, fin note (1),

parcourus (par rapport à l'éther) par les deux rayons, dont l'un se propage dans le sens de rotation du disque, l'autre dans le sens inverse ; les rayons atteignent la plaque en désaccord de phase, et les franges d'interférence sont déplacées d'une quantité proportionnelle à la vitesse angulaire de rotation du disque ainsi qu'à la surface limitée par le polygone que parcourent les deux rayons, et inversement proportionnelle à la vitesse de la lumière et à la longueur d'onde de la radiation lumineuse utilisée.

Pour vérifier la rotation de la Terre par rapport à l'éther, avec la même vitesse angulaire que par rapport aux étoiles, A. Michelson vient de refaire l'expérience de Sagnac en faisant jouer à la Terre elle-même le rôle du disque tournant (1). Ç'aurait été exactement l'expérience de Sagnac si elle avait pu se faire au pôle, et il a fallu, dans l'expression du déplacement des franges d'interférence, multiplier la vitesse de rotation par le sinus de la latitude.

La réalisation s'est faite à Clearing, près de Chicago. Sur un terrain soigneusement nivelé, a été construit un rectangle de 2010 pieds sur 1113, au moyen de tuyaux cylindriques de 20 pouces de diamètre, assemblés par des joints en caoutchouc. Aux sommets, des miroirs verticaux, à 45° sur les côtés du rectangle ; dans le voisinage de l'un des miroirs, deux fenêtres pour l'entrée et la sortie des rayons lumineux. Dans la canalisation, le vide était fait jusqu'au demi-pouce de mercure, et les franges d'interférence s'observaient avec une grande netteté.

Le déplacement des franges, vis-à-vis de la position qu'elles auraient si la Terre était immobile, pouvait être prévue par le calcul. Pour la latitude du lieu (41° 46'), la vitesse de rotation de la Terre par rapport aux étoiles, la surface entourée par la canalisation, la vitesse de la lumière et la longueur d'onde de la lumière monochromatique équivalente à la lumière employée, ce devait être un déplacement égal aux 0,236 d'une largeur de frange (2).

(1) A. Michelson, puis A. Michelson et H. Gale, *The effect of the Earth's rotation on the velocity of the light*, Aph. J., t. 61 (1925, 1), I, p. 137 et II, p. 140.

(2) Cette longueur d'onde efficace, 0,5700 μ, avait été mesurée au laboratoire. Quant à la vitesse de la lumière, déjà déterminée

Pour mesurer ce déplacement, il fallait connaître la position qu'auraient eue les franges sur la Terre immobile. Ceci a été obtenu en faisant parcourir à une partie du faisceau lumineux un autre circuit, partiellement emprunté au premier, et coupant au court dans celui-ci : la surface entourée par ce second circuit était assez petite pour que le déplacement des franges correspondantes pût être négligé, et c'est à partir de ces franges que se mesurait le déplacement des franges d'interférence correspondant au grand circuit.

En 269 observations, groupées (généralement) en séries de 20, le déplacement observé a été, avec la même unité que ci-dessus, de 0,193 à 0,255, avec une moyenne de 0,230. L'expérience était tout à fait concluante : par rapport à des axes liés à la Terre, la lumière ne se meut pas en ligne droite et avec la même vitesse dans toutes les directions ; au contraire, il en est ainsi par rapport à des axes liés à l'ensemble des étoiles. Cette conclusion garde sa valeur en Physique relativiste.

**Variation des latitudes.** — Il y a une quarantaine d'années, les instruments d'observation se sont trouvés assez perfectionnés pour déceler de petites variations des latitudes terrestres, et permettre l'étude systématique de celles-ci. Une association internationale s'est constituée pour l'étude de ces phénomènes, des observatoires ont été créés qui auraient uniquement à s'en occuper, et de l'ensemble des observations effectuées au cours de chaque année se déduit le déplacement de l'axe terrestre, et par con-

jadis par A. Michelson, elle venait de faire l'objet d'une nouvelle mesure, très précise, du physicien américain : *Preliminary experients on the velocity of light*, APH. J., t. 60 (1924, 2), p. 256. — Un faisceau lumineux, parti de Mount-Wilson, d'une face d'un miroir octogonal en rotation, est réfléchi, à Mount San Antonio, à 22 milles de là : la distance exacte des deux stations a été déterminée par le service géodésique ; la rotation du miroir est réglée de façon que le rayon, à son retour, atteigne le miroir tournant sur la face suivante : cette vitesse de rotation est alors liée à la vitesse de la lumière. Ramenée au vide, cette dernière vitesse a été trouvée égale à 299820 km. par seconde.

séquent le déplacement du pôle à la surface de la Terre, au cours de cette année (1).

Le mouvement observé apparaît comme la superposition de deux mouvements, l'un d'une période de douze mois, l'autre dont la période est comprise entre quatorze et quinze mois (2).

La guerre a interrompu les travaux du Service international des latitudes. Depuis la guerre s'est créée l'Union astronomique internationale, avec une commission de la variation des latitudes. Au Congrès de Rome de 1921, cette commission s'est transformée dans une commission mixte, commune à l'Union astronomique internationale et à l'Union géodésique internationale, sous la présidence de Kimura. Dès 1916, la continuité des travaux avait été assurée par la création, entre états non belligérants, de l'Association géodésique restreinte, sous la présidence de R. Gautier (Genève). Des six observatoires de l'ancien Service international des latitudes, quatre ont pu poursuivre leurs travaux. Dans son assemblée générale de Madrid, en 1924 (3),

(1) Pour tous les détails concernant l'organisation du Service international des latitudes et les premiers résultats de ce Service, voir E. Pasquier, *Sur les variations de la latitude et les déviations de la verticale*, ANNALES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES, t. 36 (1911-1912), p. 1 de la deuxième partie.

(2) Si la Terre était un solide indéformable, le pôle décrirait à la surface de la Terre une petite circonférence en une période de dix mois, *période eulérienne*. Des deux périodes observées, l'une de douze mois, l'autre de quatorze à quinze mois, la première est attribuée aux phénomènes qui alternent, en un an, dans le voisinage de l'un et l'autre pôles. Quant à la deuxième, *période chandlerienne* (du nom de Chandler), c'est ce que devient la période eulérienne dans un solide, non pas indéformable, mais élastique, et pour une élasticité convenable de ce solide. — Article récent sur le mouvement du pôle, sa décomposition en mouvements périodiques simples et les causes de ces périodes : H. Wehner, *Ueber den Verlauf der Polhöhenschwankungen*, A. N., t. 220 (1923-1924), n° 5280. Cet auteur décompose de la manière suivante la périodicité du mouvement polaire : une période principale de 19 années qui est l'ennéadécaétéride du calendrier luni-solaire des Grecs, avec, à très peu près, son nombre entier de 235 lunaisons, — et une période secondaire de 16 mois.

(3) G. Perrier, *La deuxième assemblée générale de l'Union géodésique et géophysique internationale*, Section de Géodésie. BULLETIN GÉODÉSIQUE, 1924, p. 241 (voir p. 263).

l'Union géodésique internationale a décidé, en principe, la reprise des observations en l'un au moins des deux autres observatoires. Ces six stations sont situées dans l'hémisphère nord, au voisinage d'un même parallèle : le congrès de Madrid a envisagé également la création de stations dans l'hémisphère sud. La réalisation de ce projet semble bien souhaitable pourvu que, cette fois, les stations ne soient pas établies à grande distance de l'équateur (1).

Des publications récentes font connaître de quelle manière le pôle s'est déplacé à la surface de la Terre jusque vers la fin de 1922 (2). Le pôle a continué (sauf une exception qui va être signalée) son mouvement de rotation de la droite vers la gauche à l'intérieur d'une circonférence dont le diamètre n'excède pas une vingtaine de mètres. De 1912 à fin 1922, le pôle a fait neuf fois le tour de sa position moyenne, en des spires dont la moins développée a été décrite pendant la seconde moitié de 1918 et la première moitié de 1919. Pendant les deux derniers mois de 1918 et le début de 1919, le pôle est resté presque stationnaire, décrivant une petite boucle en sens inverse de son mouvement habituel. De spire en spire, la position moyenne du pôle s'est déplacée progressivement d'environ deux mètres, à peu près le long du méridien de Greenwich, et de manière à diminuer la latitude moyenne de cet observatoire. Ces particularités se constatent dans la figure ci-jointe (fig. 1) dressée d'après les documents anciens et récents, et sur laquelle a été tracée la trajectoire du pôle depuis le début de 1912. Chaque date marque la position du pôle au début de l'année correspondante. La graduation des axes a été faite à la fois en mètres et en secondes ; ces dernières mesurent l'angle que fait, dans chacune de ses positions,

(1) M. Alliaume, *Meilleure approximation dans la détermination du pôle terrestre instantané et essai de systématisation des recherches sur la déviation de la verticale*, Bulletin de la Classe des Sciences de l'Académie royale de Belgique, 2e série, t. 10 (1924), p. 331.

(2) B. Wanach, *Vorläufige Ergebnisse des internationalen Breitendienstes im Jahre* 1917, A. N., t. 208 (1918-1920), n° 4969 ; *Die Polbewegung in den Jahren* 1918 *bis* 1922, Ibid., t. 222 (1924), n° 5314. Depuis le 5 septembre 1922, les observations se font d'après un programme nouveau.

l'axe instantané de la Terre avec l'axe moyen conventionnel défini par le point milieu de la figure ; la droite médiane traversant la figure de haut en bas est la trace du méridien de Greenwich, cette droite étant dirigée, au plus proche, vers Greenwich, dans la partie inférieure du dessin.

Les figures originales portent la position du pôle de dixième en dixième d'année. C'est, en effet, par dixièmes

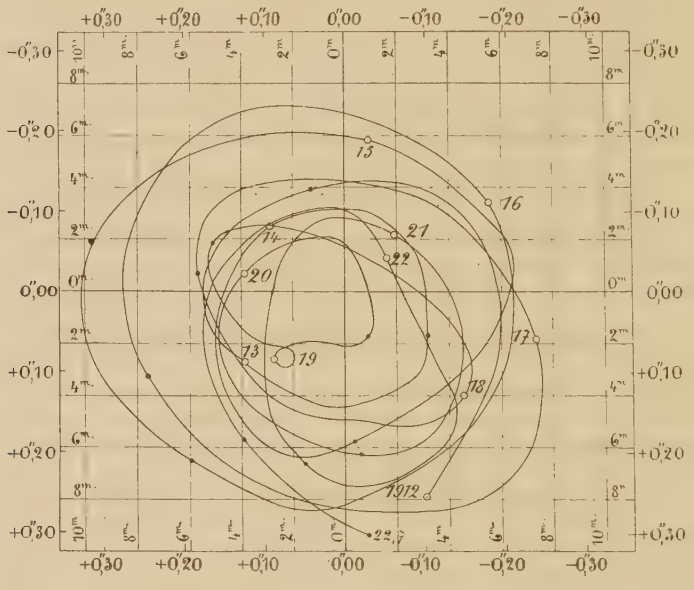



FIG. I

d'année que se calculent les moyennes d'après le programme du Service international des latitudes. Ce procédé a été vivement combattu par J. Boccardi à qui l'on doit de précieuses séries d'observations, indépendantes du Service international, et des conclusions que le programme de ce Service n'était pas capable de faire connaître (1). Cette manière de faire les moyennes a pour premier inconvénient de masquer les variations à courte période de la latitude ;

(1) J. Boccardi, *Les moyennes par dixièmes d'année dans les variations des latitudes*, C. R., t. 179 (1924, 2), p. 1249.

c'est ainsi qu'une période de 14 jours (onde semi-lunaire) et la variation diurne découverte par Boccardi ont échappé aux calculateurs officiels. Le deuxième inconvénient, non moins évident, est de diminuer constamment l'amplitude totale des variations de la latitude. La même étude met en évidence un autre inconvénient des moyennes par dixièmes d'année, la possibilité de faire admettre un déplacement non périodique du pôle vers l'une des stations d'observation. Il faut rapprocher ceci du glissement progressif des spires vers Greenwich, qui pourrait aussi bien être un déplacement apparent vers la station de Carloforte, en Sicile (1).

**La raie verte de l'aurore boréale**. — Parmi les raies du spectre de la couronne solaire se trouvent quelques raies dont l'origine est inconnue. La principale est attribuée à un élément inexistant sur la Terre et auquel on a donné le nom de coronium. — Le spectre de l'aurore boréale présente aussi, dans le vert, une raie à laquelle ne correspond, pouvait-on dire encore tout récemment, aucun élément terrestre connu, et le nom de *géocoronium* a été proposé pour désigner le gaz de l'atmosphère terrestre auquel cette raie serait due (2). Cette question a pris depuis deux ans un intérêt nouveau grâce aux travaux de L. Végard (Christiania), dont les plus importants se sont faits au laboratoire cryoscopique de l'Université de Leyde (3).

(1) D'après Boccardi, le procédé du Service international a aussi pour inconvénient de fausser la durée d'une oscillation complète, temps de parcours d'une spire. Enfin, c'est à une apparence du même genre que serait due la boucle de fin 1918. L'astronome de Turin conclut à la suppression des moyennes : « La conclusion devrait être que, surtout pour déterminer l'amplitude et les périodes totales ou partielles, on devrait déterminer les maxima, les minima de la latitude par des diagrammes représentant les observations originales ». Du point de vue de la Théorie des erreurs, il a évidemment raison, dans le sens que voici : Wanach et Boccardi résolvent correctement deux problèmes distincts, mais c'est le problème résolu par Boccardi qui est intéressant.

(2) Étude récente : H. Babcock, *A study of the green auroral line by the interference method*, Aph. J., t. 57 (1923, 1), p. 209.

(3) Ces recherches ont été rapidement signalées dans la R. A. de l'an dernier, R. Q. S., 4e série, t. 6 (1924, 2), p. 159 (p. 10 du tiré-à-part). — L. Végard, *Sur le spectre de l'aurore boréale et les couches*

Depuis plusieurs années, L. Végard étudie le spectre de l'aurore boréale. Dans des mesures de plus en plus précises, il a trouvé 0,5578 μ, puis 0,55782 μ pour la longueur d'onde de la raie non identifiée. Or, le bombardement cathodique de l'azote solide donne une lumière dont le spectre présente une bande dont les deux bords correspondent à des longueurs d'onde de 0,5450 μ et de 0,5754 μ, couvrant ainsi la place occupée par la raie aurorale. De plus, sous un potentiel de 700 à 750 volts, cette bande était prédominante parmi les raies du spectre, et le spectre ressemblait étonnamment à celui de l'aurore polaire. D'autre part, L. Végard a des raisons d'estimer à 600-700 km. la hauteur des couches atmosphériques d'où émane la lumière boréale. Or un gaz ne pourrait atteindre pareille altitude s'il n'y était porté par une force électrique, s'il n'était électrisé. La charge d'un électron par molécule n'est pas admissible, et les molécules de l'azote doivent être groupées en cristaux extrêmement petits constituant une sorte d'état quasi gazeux. Ainsi, les régions supérieures de l'atmosphère seraient principalement constituées de particules électrisées extrêmement petites d'azote solide, formant comme une poussière cristalline, et les aurores polaires seraient dues au bombardement de ces couches supérieures de l'atmosphère par les rayons cathodiques émanés du Soleil (1).

*supérieures de l'atmosphère*, C. R., t. 176 (1923, 1), p. 947 ; *Sur la constitution des couches supérieures de l'atmosphère*, Ibid., p. 1488 ; *Émission de lumière par l'azote solide et origine du spectre auroral*, Ibid., t. 178 (1924, 1), p. 1153 ; *The auroral spectrum und the upper strata of the atmosphere, Preliminary communication*, P. M., 6e série, t. 46 (1923, 2), p. 193 ; *The constitution of the upper strata of the atmosphere*, Ibid., p. 577 ; *Das Nordlichtspektrum und die Konstitution der oberen Atmosphärenschicht*, ZEITSCHRIFT FÜR PHYSIK, t. 16 (1923), p. 367 ; *The auroral spectrum and the upper atmosphere*, NATURE, t. 113 (1924, 1), p. 716 ; *Communications of low temperature investigations in the service of cosmical Physics*, REPORTS TO THE 4th INTERN. CONGRESS OF REFRIGERATION, nº 8, Leiden, 1924.

(1) La comparaison des spectres de l'azote et de l'aurore boréale, telle qu'elle a été décrite ci-dessus, et les quelques indications données sur la haute atmosphère ne suffisent évidemment pas à justifier les conclusions relatives à l'état quasi-gazeux des couches atmosphériques d'azote et à l'altitude de ces couches. Ces conséquences ont été tirées par L. Végard de l'ensemble de ses recherches, et le

La théorie de L. Végard a rencontré un adversaire en J. Mac Lennan. Dans un article publié en collaboration avec G. Shrum (1), le professeur de Toronto interprète de la manière suivante les phénomènes spectroscopiques observés par le physicien norwégien.

A la température de —252°, l'irradiation de la vapeur d'azote par des électrons fait émettre par cette vapeur une lumière dont le spectre renferme les trois raies voisines 0,5556 μ, 0,5617 μ, 0,5654 μ. C'est ce triplet que L. Végard a aperçu comme une bande comprenant la radiation aurorale 0,5578, et aucune des raies de ce triplet ne coïncide avec la raie aurorale. L'explication n'est pas valable non plus pour l'azote solide sous le bombardement cathodique, car, à la température de l'hydrogène liquide, le spectre de l'azote phosphorescent se réduit, dans la partie visible, à la seule raie 0,5231 μ (2).

détail de celles-ci ne peut pas être abordé ici. Les travaux de L. Végard constituent en même temps une exploration de l'atmosphère sous les autres rapports que sa richesse en azote. A ce titre, ils doivent être rapprochés du chapitre intitulé *Aerostatics and planetary atmospheres* dans l'ouvrage de J.-H. Jeans, *The dynamical theory of gases* (3e édition, 1922). Cet ouvrage vient d'être traduit par A. Clerc, *Théorie dynamique des gaz*, et publié à Paris, chez Blanchard, 1925. La question de la constitution de l'atmosphère, avec l'étude des travaux de Végard, pourra être reprise prochainement dans cette R.Q.S. à l'occasion de la publication de cette traduction. — Dans la R. A. de l'an dernier [R. Q. S., 4e série, t. 6 (1924, 2), p. 173 (p. 24 du tiré à part)], on a vu comment l'atmosphère a été étudiée par l'ob ervation des étoiles filantes ; comme suite à cette étude : F. A. Lindemann et G. Dobson, *A note on the temperature of the air at great heights*, Pr. R. S., t. 103 (1923), p. 339.

(1) J. Mac Lennan et G. Shrum, *On the luminiscence of nitrogen, argon and other condensed gases at very low temperatures*, Pr. R. S., t. 106 (1924), p. 138.

(2) D'après les mêmes auteurs, il serait également vain de chercher l'explication de la raie aurorale en faisant jouer à l'argon le rôle que joue l'azote dans l'hypothèse de Végard. En effet, l'irradiation cathodique de l'argon gazeux à basse température fournit le doublet 0,5648-0,5607 μ, tandis que l'argon phosphorescent à la température de l'hydrogène liquide donne les raies 0,4750 μ et 0,5300 μ. A cette même température, l'oxyde de carbone, l'ammoniaque, l'oxygène, la vapeur d'eau ne deviennent pas luminescents sous le bombardement cathodique, et ne peuvent pas non plus être invoqués dans

La réponse de L. Végard (1) ne doit probablement être considérée que comme provisoire. L'auteur limite la discussion aux deux premières raies du triplet de Mac Lennan, 0,5556 μ et 0,5617 μ. Ces raies, qui encadrent la raie aurorale, ont été obtenues au moyen d'azote solide, sans que les dimensions des cristaux aient été prises en considération. Or, pour des cristaux d'azote de plus en plus petits, la deuxième raie du triplet devient de plus en plus nette vis-à-vis des deux autres, et tend de plus en plus à se confondre avec la raie de l'aurore boréale. Plusieurs autres gaz solidifiés, comme l'oxygène, l'ammoniaque et l'argon, ont été soumis à des rayons cathodiques et à des rayons canaux. Sauf pour l'argon, les phénomènes lumineux furent faibles. Quant à l'argon, son spectre est formé de plusieurs raies connues et d'un spectre à peu près continu. Par conséquent, conclut l'auteur, ni l'argon ni aucun des autres gaz examinés ne donnent un effet lumineux comparable à celui de l'azote solide à basse température, et celui-ci est le seul qui soit applicable à l'aurore boréale (2).

Le jour où paraissait cette réponse de L. Végard, la Royal Society recevait une note d'Atkinson (Oxford) relative à la même question (3). C'est une offensive très nette contre la théorie du physicien norwégien, et on y a pour

l'explication de la raie de l'aurore polaire. Il reste possible de prendre en considération quelque élément léger, l'hydrogène à l'état solide, l'hydrogène luminescent à très basse température, l'hélium gazeux, une combinaison gazeuse d'hydrogène et d'hélium.

(1) L. Végard, *La luminescence des gaz solidifiés et leur application à des problèmes cosmiques*, C. R., t. 179 (1924, 2), p. 151 ; *The light emitted from solidified gases and its relation to cosmic phenomena*, NATURE, t. 114 (1924, 2), p. 357.

(2) Dans des travaux actuellement en cours, L. Végard trouve la raie de l'aurore boréale lors du bombardement cathodique de mélanges convenablement dosés d'a ote et d'argon, et d'azote et de néon (dans ce dernier cas, néon presque pur). Les mélanges où le pourcentage est voisin donnent des raies voisines de la raie boréale. Aussi de nouvelles études cherchent-elles des fluctuations dans la longueur d'onde de cette dernière raie. — D'autre part, Mac Lennan aurait trouvé la raie aurorale dans le bombardement cathodique de l'oxygène.

(3) R. Atkinson, *Note on Vegard's theory of the aurora*, PR. R. S., t. 106 (1924, 2), p. 429.

objet de démontrer l'impossibilité thermodynamique de cette théorie. Le champ électrique ne serait pas assez puissant pour faire monter la poussière cristalline d'azote à la hauteur nécessaire ; la lumière émise par les cristaux ne pourrait pas être suffisante, sauf à admettre des cristaux tellement petits que leur charge par unité de volume ne serait plus admissible ..., et d'autres difficultés sont opposées aux conclusions de L. Végard.

Il faut souhaiter que ces discussions provoquent de nouvelles recherches. La question est duplus haut intérêt du point de vue de l'Astronomie physique. Celle-ci rencontre d'autres raies dont l'origine est inconnue, et tout particulièrement la raie caractéristique des nébuleuses attribuée à un élément auquel on a donné le nom de *nébulium*. Le succès de L. Végard pourrait faire admettre qu'il s'agit, en des cas pareils, non pas d'un élément nouveau, mais d'un élément connu dans un état physique spécial non encore étudié (1).

(1) Dans un travail de juillet 1924, H. Deslandres appelle *raies de l'aurore boréale* les raies 0,5229 μ et 0,5577 μ (ou 0,555 μ) les raies de l'azote solide ionisé $Az^{+++}$ : *Extension à plusieurs spectres de lignes d'une propriété déjà reconnue sur plusieurs spectres de bandes*, C. R., t. 179 (1924, 2), p. 5. — Dans une note précédente, on a vu que l'hypothèse a été présentée que la raie de l'aurore boréale soit due à une combinaison gazeuse d'hydrogène et d'hélium. La même hypothèse a été avancée par H. Plaskett pour expliquer la raie non identifiée des nébuleuses, plutôt que de l'attribuer à quelque élément nouveau : *A possible origin of the nebular lines*, NATURE, t. 112 (1923, 2), p. 392. — D'après leur distribution dans le spectre, les raies du soi-disant nébulium doivent être dues à une molécule dont les atomes ont des masses petites. Si l'on veut que cette molécule soit constituée d'atomes connus, il est naturel de recourir aux atomes des éléments dont la présence est déjà certaine. Les éléments connus des nébuleuses sont, d'après les spectres, l'hydrogène, l'hélium, ainsi que l'azote et le carbone. La condition que la masse des atomes cherchés soit petite, écarte ces deux derniers éléments. Il est possible d'admettre une molécule constituée d'atomes d'hydrogène et d'hélium : au cours de ses recherches expérimentales, Aston a soupçonné leur existence. L'auteur présente ceci comme une « working hypothesis » qui aura en tout cas le mérite de provoquer des travaux de laboratoire dans une direction nouvelle.

## LE SOLEIL

**Pression à la surface du Soleil.** — D'après la Physique relativiste, les raies spectrales dues à un élément déterminé doivent être décalées vers l'extrémité rouge du spectre d'autant plus que la source lumineuse appartient à un champ de gravitation plus intense, d'où l'intérêt de comparer les longueurs d'onde des raies correspondant à un même élément, l'une dans le spectre solaire, l'autre dans le spectre d'une source terrestre.

Mais la pression qui règne dans la source lumineuse peut avoir des effets analogues, et il est de la plus haute importance de faire le départ entre le déplacement des raies dû à la gravitation et le déplacement dû à la pression. C'est pourquoi la détermination de la pression qui règne à la surface du Soleil a fait l'objet de nombreux travaux pendant ces dernières années. Au fur et à mesure que se perfectionnaient les méthodes de recherche, il apparaissait de mieux en mieux que la pression de l'atmosphère solaire est extrêmement faible, et sans effet appréciable sur la position des raies spectrales.

H. N. Russell et J. Stewart ont publié un article important sur cette question (1). — On pensait jadis que les déplacements des raies solaires correspondaient à une pression d'une à deux atmosphères dans la couche renversante. On sait aujourd'hui que cette estimation est beaucoup trop élevée : des recherches récentes effectuées à Mount-Wilson, sur des raies aussi indifférentes que possible à toute influence perturbatrice, démontrent que la pression dans la couche renversante n'est qu'une petite fraction d'atmosphère, avec une approximation qui est de l'ordre même de cette petite fraction. — Certaines raies sont sensibles à la pression de la manière suivante : très diffuses quand elles sont produites au laboratoire, à la pression atmosphérique, elles sont d'autant plus nettes que la pression de la source est plus basse. Dans le spectre solaire, leur netteté témoigne

(1) H. N. Russell et J. Stewart, *Pressures at the Sun's surface* Aph. J., t. 59 (1924, 1), p. 197.

d'une pression sûrement inférieure à un dixième d'atmosphère. — D'autres méthodes de détermination de la pression solaire s'appuient sur la théorie de l'opacité des gaz à haute température, théorie dans laquelle l'épaisseur sous laquelle un gaz de telle nature est opaque à telle température, dépend encore de la pression. Or, la photosphère solaire est opaque sous une épaisseur de l'ordre de 100 km., tandis que la couche renversante et la chromosphère sont encore transparentes sous une épaisseur de l'ordre de 10 000 km. Il en résulte que la pression au pied de la chromosphère serait moindre qu'un dix-millième d'atmosphère (1).

Depuis cette étude de Russell et Stewart ont été publiés les travaux effectués à Mount-Wilson et auxquels ces deux auteurs faisaient allusion (2). Les raies observées ont été choisies de manière que soient éliminées toutes les circonstances perturbatrices, en particulier l'influence du niveau de la couche absorbante, le déplacement des éléments absorbants le long du rayon visuel et l'effet prévu par la Physique relativiste. La pression conclue est 0,13 atm. au niveau des 100 kilomètres les plus profonds de la couche renversante.

**Constitution de l'atmosphère solaire.** — Les deux études qui viennent d'être analysées renferment la description de l'atmosphère solaire telle que les auteurs croient pouvoir la proposer à la suite de leurs travaux.

D'après H. N. Russell et J. Stewart, l'atmosphère solaire, traversée de l'extérieur vers l'intérieur, débute par une couche profonde, la *chromosphère*, dans laquelle les gaz sont maintenus en équilibre par la pression de radiation agissant sur les atomes. La pression et la densité dans cette couche augmentent lentement en profondeur, et la pression

(1) L'étude de Russell et Stewart signale et discute d'autres méthodes pour la détermination de la pression solaire : la largeur des raies solaires ; l'équilibre thermodynamique des couches superficielles du Soleil ; la pression de radiation ; l'équilibre chimique des gaz ionisés. Toutes ces méthodes s'accordent pour conclure à une pression très basse, inférieure à un dix-millième et à peine supérieure à deux cent millièmes d'atmosphère.

(2) C. St. John et H. Babcock, *Pressure and circulation in the reversing layer of the Sun's atmosphere*, t. 60 (1924, 2), p. 32.

à sa base doit être de l'ordre du millionième d'atmosphère. En dessous de cette couche, la pression augmente rapidement en profondeur, et la température demeure à peu près constante, dans le voisinage de 5000°, tant que les couches gazeuses sont transparentes. C'est la *couche renversante*. Lorsque la pression atteint un centième d'atmosphère, l'absorption commence à rendre les gaz brumeux. L'opacité croît rapidement avec la pression, et la couche renversante se transforme presque brusquement dans la *photosphère* où l'opacité est complète et où la température s'est notablement élevée (1).

A la pression du centième d'atmosphère correspond, au-dessus de la photosphère, une quantité totale de matière de 0,4 gramme par $cm^2$, équivalente à une couche d'air de 10 pieds d'épaisseur à la pression normale (2).

L'examen du spectre solaire a également permis aux astronomes de Mount-Wilson de proposer un tableau d'ensemble de la constitution de l'atmosphère solaire, des pressions qui y règnent et des courants dont cette atmosphère est parcourue. Dans les mille premiers kilomètres au dessus de la photosphère, le fer est l'élément dominant, auquel s'associe, vers 1500 km., l'aluminium. Aux niveaux de 5000 à 6000 km., règnent le calcium (non ionisé), le sodium et le titane ionisé. De 8000 à 14000 km., l'atmosphère solaire est principalement formée d'hydrogène et de calcium ionisé. Des couches inférieures à vapeurs de fer auxcouches à vapeurs de sodium, la pression passe du dixième au dix-millième d'atmosphère. L'observation de l'ensemble du Soleil (par opposition à l'observation dans le voisinage des taches) constate des courants radiaux, centrifuges dans le

( ) La température photosphérique efficace que mesure l'Astronomie physique est une température moyenne des couches rayonnantes. — Dans la couche renversante, avec sa température voisine de 5000° et un poids moléculaire moyen probablement voisin de 20, la pression et la densité doivent décupler pour un abaissement de 40 km. du niveau considéré, à quoi correspond, pour toute la couche renversante, une épaisseur de 200 km. — Du point de vue de la spectroscopie, les raies de Frauenhofer seraient dues principalement à l'absorption dans les niveaux élevés de la couche renversante.

(2) Ces deux derniers alinéas sont à peu près la traduction d'emprunts faits à l'article de Russell et Stewart.

voisinage immédiat de la photosphère, et centripètes plus haut, avec 400 km. pour altitude de la couche où ces courants s'annulent ; ce sont des courants lents, dont la vitesse est une fraction de kilomètre par seconde. Dans le voisinage des taches règnent des courants tangentiels droitiers au contact de la photosphère, gauchers à partir du niveau de 1500 km. ; leur vitesse est inférieure à cinq kilomètres par seconde (1).

**Taches solaires.** — A certaines époques, de nombreuses taches s'aperçoivent chaque jour sur le Soleil ; à d'autres époques, des semaines peuvent s'écouler sans qu'une seule tache soit observée. Dans le premier cas, on dit que l'activité solaire est considérable ; elle est faible dans le second cas. L'activité solaire passe par des maxima et des minima, de manière à observer un cycle dont la période est de onze années (11,1 ans) : des maxima ont été observés en 1881, 1892, 1903, 1914, et nous nous trouvons actuellement dans le voisinage d'un nouveau maximum. D'un maximum au suivant, l'activité solaire décroît lentement pour croître ensuite beaucoup plus rapidement : chaque minimum est nettement plus voisin du maximum qui le suit que du maximum qui le précède.

Les taches solaires se montrent dans deux zones symétriques par rapport à l'équateur, de 10 à 40° de latitude (aussi bien positive que négative). D'un maximum d'activité au minimum suivant, la latitude moyenne des taches diminue : deux taches moyennes, l'une au nord, l'autre au

(1) La même étude attribue des vitesses de rotation différentes aux diverses couches de l'atmosphère solaire. A la surface de la photosphère la vitesse angulaire serait de 13°,84 par jour, et elle augmenterait de couche en couche pour dépasser 15° dans les couches les plus extérieures.

L'intensité lumineuse de la couronne solaire a été étudiée pendant l'éclipse totale du 21 septembre 1922, par l'expédition envoyée dans le Queensland par l'Université de Sydney : G. H. Briggs, *Measurement of the intensity of the light of the corona at the eclipse of Sept. 21, 1922*, Aph. J., t. 60 (1924, 2), p. 273. L'appareil de mesure était constitué de piles photoélectriques. Un maximum fut constaté au début et à la fin de la totalité ; l'éclat de la couronne était moyennement de l'ordre du tiers de celui de la pleine Lune.

sud de l'équateur, et dont chacune représenterait l'activité de tout un hémisphère, se rapprocheraient graduellement de l'équateur, symétriquement par rapport à celui-ci. Dans le voisinage du minimum, les taches sont voisines de l'équateur; elles en sont écartées peu après le maximum. Dans le passage du minimum au maximum, des taches s'observent simultanément au voisinage de l'équateur et aux latitudes élevées : au voisinage de l'équateur, ce sont les dernières du cycle finissant ; aux latitudes élevées, ce sont les premières du nouveau cycle qui commence. Cette simultanéité dure deux ou trois ans : la première tache du cycle dans lequel nous entrons a été observée dès le 24 juin 1922, à 31° de l'équateur.

Les premières recherches spectroscopiques des taches solaires décelèrent la présence de grands nuages lumineux de vapeur de calcium au-dessus des taches. L'étude des raies d'hydrogène acquit également grande importance et, en 1908, le spectrohéliogramme de la ligne Hα de l'hydrogène, interprété par G. Hale à Mount-Wilson, fit apparaître les taches solaires comme les centres d'immenses tourbillons. Ce fut la première découverte de G. Hale dans ce domaine (1).

Le phénomène de Zeeman, découvert en 1897, consiste en ce qu'un gaz incandescent soumis à un champ magnétique intense fournit un spectre dont la plupart des lignes sont (généralement) détriplées, et la manière dont les composantes du triplet sont polarisées dépend de l'orientation du champ magnétique par rapport au rayon lumineux reçu par le spectroscope. Il en est de même des raies d'absorption lorsqu'il s'agit d'un gaz non incandescent traversé par les rayons lumineux analysés. G. Hale constata le phénomène de Zeeman dans le spectre des taches solaires. De nombreuses raies sont divisées en trois composantes, dont les deux extérieures sont polarisées elliptiquement dans des sens inverses, tandis que la composante centrale est polarisée rectilignement (2). On sait ainsi que

(1) G. Hale, *Sun-spots as magnets and the periodic reversal of their polarity*, NATURE, t. 113 (1924, 1), p. 105. — H. Newall, *Hale's magnetic vortices*, Ibid., p. 112.

(2) On va rappeler ici de quelle façon la polarisation des compo santes du triplet dépend de l'orientation du champ magnétique par

les taches solaires sont les sièges de champs magnétiques intenses. Le sens de la polarisation elliptique de l'une des composantes extérieures du triplet, par exemple de la composante la plus proche de l'extrémité rouge du spectre, permet de décider si, dans la tache étudiée, le champ magnétique équivaut au champ d'un aimant dont le pôle nord ou le pôle sud est dirigé vers l'observateur ; on dit alors, respectivement, que le champ est nord ou positif, ou bien sud ou négatif, et, par abréviation, que la tache solaire est, de même, soit positive, soit négative (1). Dans une tache positive, les particules électrisées positivement sont animées d'un mouvement de rotation ayant le sens inverse de celui des aiguilles d'une montre (pour qui les regarde de l'extérieur du Soleil), et, *mutatis mutandis*, on voit quel est le sens

rapport à la direction du rayon lumineux reçu par le spectroscope Si les lignes de force du champ magnétique sont perpendiculaires au rayon lumineux (effet transversal), les trois composantes sont polarisées rectilignement. Si, à partir de cette configuration, le champ magnétique tourne de manière que la direction de ses lignes de force se rapproche de celle du rayon lumineux, la composante centrale continue d'être polarisée rectilignement tandis que son intensité diminue graduellement, et les composantes extérieures sont polarisées elliptiquement dans des sens inverses, suivant des ellipses dont l'excentricité, à partir de l'unité, se rapproche de plus en plus de zéro (effet oblique). Lorsque les lignes du champ sont parallèles au rayon lumineux (effet longitudinal), la composante centrale s'est entièrement éteinte, le triplet s'est réduit à un doublet, et les deux composantes extérieures sont polarisées circulairement dans des sens inverses ; le sens de l'une et de l'autre dépend du nom du pôle magnétique (nord ou sud) tourné vers l'observateur : ce pôle est nord ou sud suivant que, dans l'axe du champ, les lignes de force font un angle nul ou égal à deux droits avec le rayon lumineux suivi de la source vers le spectroscope. — D'autre part, l'écartement des composantes du triplet est d'autant plus grand que le champ magnétique est plus intense. C'est sur ces règles que se sont appuyés les astronomes de Mount-Wilson pour faire l'exploration magnétique de milliers de taches solaires, et arriver aux conclusions qui vont être données dans le texte.

(1) Avant son admission dans le spectroscope, le rayon lumineux traverse un nicol et un mica quart d'onde : la tache est positive ou négative suivant que, des deux composantes extérieures du triplet, la seule qui se maintient est celle qui se trouve, par rapport à la composante centrale, vers l'extrémité rouge ou l'extrémité violette du spectre.

de rotation des particules électrisées positivement ou négativement, soit dans une tache positive, soit dans une tache négative. Le signe magnétique de la tache dépend finalement du sens de rotation des particules électrisées qui sont, positives ou négatives, les plus nombreuses ( ).

Dans ces tourbillons solaires de particules électrisées, il est difficile de ne pas voir un phénomène analogue à celui des cyclones de l'atmosphère terrestre : les cyclones sont gauchers ou droitiers suivant qu'ils appartiennent à l'hémisphère nord ou à l'hémisphère sud, et ce rapprochement (tout hasardé qu'il soit) va donner une nouvelle impulsion à l'étude des taches solaires. Celles-ci, toutefois, ne se montrent pas positives ou négatives suivant l'hémisphère auquel elles appartiennent. Mais elles se présentent très généralement deux par deux, à peu de distance l'une de l'autre, à peu près le long d'un même parallèle à l'équateur, l'une précédant l'autre dans le mouvement de rotation du Soleil. De deux taches associées, l'une est toujours positive, et l'autre négative.

Des deux taches associées, l'une est ordinairement plus grande que l'autre, et la durée de celle-ci est moindre. On a vu des taches d'abord isolées s'adjoindre un compagnon, et ce compagnon disparaître plus tôt que la tache principale. Cependant, après cette disparition de la tache visible, les phénomènes magnétiques subsistent ; les phénomènes magnétiques, de même, se perçoivent avant l'apparition de la tache-compagnon ; plus généralement, l'exploration spectro-magnétique des environs d'une tache isolée fait découvrir, dans l'immense majorité des cas, une

(1) Dans une tache négative, par exemple, il est également possible que le champ magnétique soit dû à des particules électrisées positivement tournant dans le sens du mouvement des aiguilles d'une montre, ou qu'il soit dû à des particules électrisées négativement tournant dans le sens opposé. Cette ambiguïté est sans importance pour ce qui doit suivre, mais, dans l'interprétation physique des phénomènes, en vue d'une meilleure connaissance de la constitution du Soleil, on se représentera volontiers que la charge électrique, positive ou négative, qui l'emporte sur l'autre, est la même dans toutes les taches de même signe : ainsi, à des signes différents des taches correspondront, dans celles-ci, des mouvements tourbillonnaires dont les sens seront différents.

tache invisible qui la précède ou qui la suit (1). De deux taches associées dont l'une est invisible, il reste vrai de dire que l'une est positive, et l'autre négative. C'est presque toujours la tache la plus importante, ou la seule visible, qui est la tache avant du couple.

Le signe des taches solaires associées deux à deux a été étudié à Mount-Wilson depuis 1908 par l'observation de 2136 taches. Voici la conclusion de cette étude, schématisée sur la figure ci-jointe :

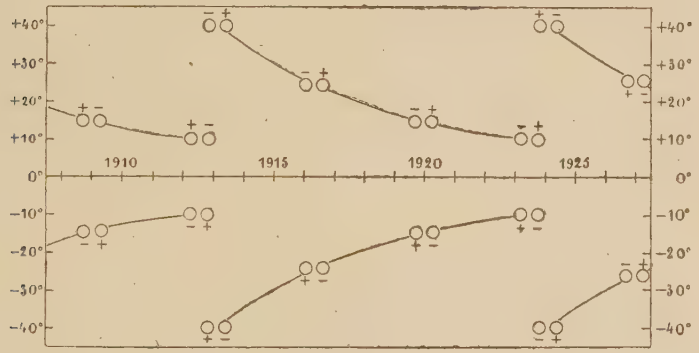



FIG. 2

1. de 1908 à 1912-1913, dans chaque couple de taches, la tache avant est négative et la tache arrière positive, ou bien inversement, suivant que le couple étudié appartient à l'hémisphère nord ou à l'hémisphère sud ;

2. de 1912-1913 à 1922-1923, la tache avant est positive et la tache arrière négative, ou bien inversement, suivant que le couple étudié appartient à l'hémisphère nord ou à l'hémisphère sud.

C'est en 1912-1913 que s'est fait le passage d'un cycle au suivant par disparition des taches voisines de l'équateur et réapparition des taches aux latitudes élevées. On est sur le point de tenir la loi de polarité du champ magnétique des taches solaires. Il reste à savoir ceci : en 1924 vont réap-

(1) Sur les taches solaires invisibles et leur découverte par G. Hale, voir R. A., 1922, dans R. Q. S., 4e série, t. 41 (1923, 2), p. 194 (p. 12 du t. à p.).

paraître les taches éloignées de l'équateur, les premières du cycle nouveau ; quel sera le sens de leurs champs magnétiques ?

La première tache du cycle nouveau est observée le 24 juin 1922, dans l'hémisphère nord ; comme il arrive généralement pour une tache isolée, c'est une tache avant et la tache arrière est invisible. C'est une tache négative, et la loi, ainsi confirmée, le sera de plus en plus par les taches de plus en plus nombreuses du cycle nouveau : si on numérote les cycles successifs d'activité solaire de façon que (par exemple) le cycle 1912-1923 soit un cycle de rang pair, dans tout couple de taches solaires, le signe magnétique de la tache avant est de même nom que l'hémisphère auquel elle appartient, ou de nom contraire, suivant que le cycle au cours duquel elle se manifeste est de rang pair ou impair (1).

## ÉTOILES

**Températures et diamètres apparents.** — A. Brill a publié les températures et diamètres apparents de 134 étoiles (2). Les températures ont été déduites de l'examen du spectre et de la distribution de l'énergie rayonnante dans

(1) La latitude $\varphi$ d'une tache solaire est positive ou négative suivant que la tache appartient à l'hémisphère nord ou à l'hémisphère sud. Soit $n$ le numéro d'ordre du cycle au cours duquel la tache se manifeste, compté comme il vient d'être dit. Le signe de la tache avant est celui de l'expression $\varphi\ (-1)^{n+1}$.

La période de l'activité solaire, telle qu'elle se montre égale à 11,1 années, a été définie d'après le nombre moyen des taches pendant un intervalle de temps convenablement choisi. Mais si l'on définit plutôt cette période comme le temps après lequel le Soleil se retrouve moyennement dans les mêmes conditions magnétiques, on voit que cette durée doit être doublée, et portée à 22,2 années.

Les travaux de G. Hale forment un magnifique ensemble de découvertes. Leur interprétation physique constituera une théorie du Soleil dans laquelle l'association des taches deux par deux jouera un rôle essentiel. Sur une tentative dans ce sens, voir : J. Levine, *Sur les taches solaires*, C. R., t. 178 (1924, 1), p. 1356.

(2) A. Brill, *Temperaturen und scheinbaren Halbmesser von* 134 *Sternen*, A. N., t. 223 (1924-1925), n° 5335.

la partie visible de celui-ci (températures optiques) (1). Les diamètres apparents ne résultent pas de mesures directes, comme seraient les mesures interférentielles qui ont réussi jusqu'ici pour quelques étoiles (2), mais sont déduites de calculs thermodynamiques. Voici un extrait de ce tableau, dans lequel les étoiles ont été rangées par ordre de grandeur visuelle décroissante (3).

(1) L'auteur adopte, pour la notion de température d'un astre, une définition précisée de la manière suivante : température d'un radiateur intégral (corps noir) qui aurait la même couleur, c'est-à-dire la même répartition de l'énergie dans la partie visible de son spectre (de 0,451 μ à 0,642 μ), que l'astre considéré ; ainsi, pour un astre donné, le rapport des intensités correspondant à deux longueurs d'onde doit être égal au rapport des intensités correspondant aux deux mêmes longueurs d'onde dans le spectre émis par le corps noir dont la température est, par définition, celle de l'astre étudié. Il convient de l'appeler *température optique*, pour ne pas la confondre avec la température thermodynamique considérée jusqu'ici (température efficace) qui ne se confondrait avec elle que pour une source lumineuse qui se comporterait exactement comme un corps noir. La température optique (absolue) du Soleil est de 6650°. — Des définitions précises sont nécessaires, mais, pratiquement, la température efficace et la température absolue d'un même corps sont assez voisines pour que nous puissions, ici, sans faire la réduction de l'une à l'autre, comparer les températures de deux corps, ne connaissant que la température efficace de l'un, la température optique de l'autre. — Sur ces notions voir F. Henning, *Die Bestimmung höher Temperaturen*, ZEITSCHRIFT FÜR ELEKTROTECHNIE, t. 30 (1924), p. 308. Articles récents de vulgarisation sur la détermination des températures stellaires : C. Nordmann, *La vie et la mort des étoiles*, L'ILLUSTRATION, 7 avril 1923 ; H. Dingle, *The temperatures of the stars*, NATURE, t. 112 (1923, 2), p. 167. — La température de RY Dragon n'est que celle de la flamme de l'hydrogène, 2170° ; à l'autre extrémité de l'échelle des températures connues se trouve ζ Persée, 28000°.

(2) R. A., 1920, dans R.Q.S., 3e série, t. 30 (1921, 2), p. 268 (p. 26 du t. à p.). — R. A., 1921, dans R.Q.S., 4e série, t. 2 (1922, 2), p. 180 (p. 13 du t. à p.). — R. A., 1922, dans R.Q.S., 4e série, t. 4 (1923, 2), p. 221 (p. 39 du t. à p.).

(3) Les étoiles visibles à l'œil nu étaient classées jadis d'après leur éclat (et le sont encore dans le langage courant) en six *grandeurs* : la première grandeur était attribuée aux vingt étoiles les plus brillantes, et les étoiles de la sixième grandeur étaient les plus faibles encore visibles à l'œil nu. Aujourd'hui, où l'on dit *magnitude* plutôt que grandeur, les progrès de la photométrie permettent une défini-

| ÉTOILES | GRAND. VIS. | TEMP. ABS. (1) | DIAM. APP. |
|---|---|---|---|
| α Lyre (Véga) | 0,14 | 11900°(11600) | 0″,00147 |
| α Cocher (Capella) | 0,21 | 5630 ( 5500) | 0,00518 |
| α Bouvier (Arcturus) | 0,24 | 4340 ( 4200) | 0,01081 |
| α Petit Chien (Procyon) | 0,48 | 7550 | 0,00250 |

tion de cette quantité qui la rende susceptible de varier d'une manière continue ; d'où l'introduction de grandeurs exprimées par des nombres fractionnaires (et même négatifs). — Voir R. A., 1923, dans R.Q.S., 4e série, t. 6 (1924, 2), p. 170 (p. 21 du t. à p.). — Si $E_o$ est l'éclat (apparent) d'une étoile de la première grandeur (α Taureau, Aldébaran) et E l'éclat (apparent) d'une étoile dont la grandeur est $m$, la relation entre $m$ et E est la suivante :

$$E = E_o.10^{0,4(1-m)}.$$

Voici, d'après cette formule, un tableau qui indique le rapport $\epsilon = \frac{E}{E_o}$ de l'éclat d'un astre dont la grandeur est $m$ à celui d'une étoile de première grandeur :

| $m$ | $\epsilon$ | $m$ | $\epsilon$ | $m$ | $\epsilon$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 8,0 | 0,002 | 0,8 | 1,202 | — 0,8 | 5,248 |
| 7,0 | 0,004 | 0,6 | 1,445 | — 1,0 | 6,311 |
| 6,0 | 0,010 | 0,4 | 1,738 | — 1,2 | 7,586 |
| 5,0 | 0,025 | 0,2 | 2,089 | — 1,4 | 9,120 |
| 4,0 | 0,063 | 0,0 | 2,512 | — 1,6 | 10,965 |
| 3,0 | 0,159 | — 0,2 | 3,020 | — 1,8 | 13,183 |
| 2,0 | 0,398 | — 0,4 | 3,631 | — 2,0 | 15,849 |
| 1,0 | 1,000 | — 0,6 | 4,365 | — 2,2 | 19,055 |

Dire que la magnitude du Soleil est — 26,72 signifie que l'éclat (apparent) du Soleil est $10^{0,4\times 27,72}$ ou 122.434.000.000 de fois plus grand que celui d'une étoile de première grandeur. — Il faut encore distinguer l'éclat visuel et l'éclat photographique. Les radiations auxquelles les photomètres visuels sont le plus sensibles ne sont pas les mêmes que celles auxquelles sont le plus sensibles les photomètres photographiques. Si la lumière d'une étoile était presque purement rouge, son éclat photographique serait presque nul et sa grandeur photographique extrêmement grande. Aussi la quantité à ajouter à la grandeur visuelle pour obtenir la grandeur photographique est-elle d'autant plus grande que l'étoile est plus rouge : c'est l'*indice de couleur*, nul pour les étoiles blanches du type de Sirius. La grandeur photographique du Soleil est — 26,17, et son indice de couleur est 0,55.

( ) Les nombres entre parenthèses dans la colonne des températures sont empruntés à un travail plus récent : R. Sampson, *Effective temperatures of 64 stars*, M. N., t. 85 (1924-1925), p. 212, De ce travail extrayons encore : α Andromède, 12600° ; γ Persée, 25000° ; β Andromède, 3300° ; β Orion, 14800° ; β Grande Ourse, 20000°.

| | | | |
|---|---|---|---|
| α Aigle (Altaïr) | 0,89 | 8640° | o″,00164 |
| α Orion (Betelgeuse) | 0,92 | 3400 ( 3400) | 0,01828 |
| α Taureau (Aldébaran) | 1,06 | 3560 ( 3400) | 0,01439 |
| β Gémeaux (Pollux) | 1,21 | 4610 ( 4200) | 0,00557 |
| α Cygne (Deneb) | 1,33 | 11000 (10900) | 0,00093 |
| α Lion (Régulus) | 1,34 | 13400 | 0,00071 |
| α Gémaux (Castor) | 1,58 | 10600 | 0,00087 |
| ε Grande Ourse | 1,68 | 10200 | 0,00088 |
| γ Orion | 1,70 | 21100 | 0,00038 |
| ε Orion | 1,75 | 20800 | 0,00037 |
| β Taureau | 1,78 | 15300 | 0,00051 |
| α Persée (Algol) | 1,90 | 6710 | 0,00162 |
| ζ Orion | 1,91 | 26600 | 0,00028 |
| η Grande Ourse | 1,91 | 16700 | 0,00043 |
| γ Gémeaux | 1,93 | 10700 | 0,00073 |
| α Grande Ourse | 1,95 | 4570 | 0,00409 |

L'étude de la distribution de l'énergie dans les spectres stellaires a été faite aussi à l'observatoire astrophysique de la Smithsonian Institution (1). C. Abbot a utilisé un radiomètre de Nichols dont les déviations ont été observées en divers points des spectres du Soleil et de neuf étoiles brillantes. Les résultats de ces mesures, mis en diagramme pour chacun des astres, ont été rapprochés de la courbe de distribution de l'énergie dans le spectre du radiateur intégral (corps noir), et de cette comparaison ont été tirées les températures absolues du Soleil et des étoiles. Enfin, on en a déduit le diamètre apparent des étoiles étudiées ; leurs distances sont connues, et on a pu écrire leurs diamètres absolus. Dans le tableau ci-dessous, les distances sont exprimées en années de lumière, et les diamètres au moyen du diamètre du Soleil pour unité. Les étoiles sont rangées dans l'ordre des distances croissantes.

| ÉTOILES | TEMP. ABS. (2) | DISTANCES (3) | DIAMÈTRES |
|---|---|---|---|
| α Grand Chien (Sirius) | 11000° | 8,6 | 1,2 |
| α Petit Chien (Procyon) | 8000 | 10,4 | 1,1 |
| α Lyre (Véga) | 14000 | 25,2 | 2,0 |

( ) C. G. Abbot, *Radiometer measurements of stellar energy spectra*, Aph. J., t. 60 (1924, 2), p. 87.

(2) La température correspondante du Soleil est 6000°.

(3) La comparaison de ces diamètres calculés et des résultats des mesures interférentielles n'est guère satisfaisante. Ces dernières mesures ont donné : α Grand Chien, 2 ; α Taureau, 39 ; β Pégase, 82.

| | | | |
|---|---|---|---|
| α Cocher (Capella) | 5800° | 46,0 | 13 |
| β Pégase | 2850 | 50,4 | 94 |
| α Taureau (Aldébaran) | 3000 | 61,6 | 70 |

**Constitution et atmosphère des étoiles.** — La répartition de l'énergie dans les spectres stellaires a également été étudiée par J. Baillaud à l'observatoire du Pic du Midi (1). Parmi les étoiles observées, seule la courbe de Procyon (α Petit Chien) se rapproche dans son ensemble de la courbe du corps noir. Les courbes trouvées pour les étoiles des types B (ε Orion) et A (α Lyre, Véga) n'ont aucun rapport avec celle du corps noir, à quelque température qu'on le considère, du moins pour les régions spectrales de longueur d'onde moindre que 0,5000 μ : il est impossible de les appliquer à l'évaluation des températures optiques (2).

Les étoiles des classes A et B sont des étoiles blanches. Procyon est, comme le Soleil, une étoile (naine) jaune. De la différence entre les modes de distribution de l'énergie dans leur spectre, on doit conclure que l'origine du spectre continu n'est pas la même pour les étoiles blanches et pour les étoiles jaunes. Pour celles-ci, le spectre continu, analogue à celui du corps noir, proviendrait d'une photosphère de particules solides incandescentes. Les étoiles blanches, au contraire, seraient des masses gazeuses à très haute température.

Les étoiles blanches des classes B et A sont respectivement du type de ε Orion (étoiles à hélium) et du type de Sirius (étoiles à hydrogène). Les étoiles jaunes comprennent la classe F, du type de Procyon (étoiles à calcium) et la classe G, du type solaire, dans le spectre desquelles dominent les raies métalliques. Ces classes B, A, F, G, sont rangées dans l'ordre des températures décroissantes. Au delà de la classe solaire apparaissent, dans cet ordre, les étoiles de la classe K, du type d'Aldébaran, puis de la classe M, du type

(1) J. Baillaud, C. R., t. 177 (1923, 2), p. 424 ; *Étude sur la répartition de l'énergie dans quelques spectres stellaires*, Ibid., t. 178 (1924 1), p. 1604.

(2) Comparer avec les résultats ci-dessus de A. Brill qui a précisément donné les températures optiques de α Lyre et de ε Orion On voit qu'il y a lieu que les courbes d'observation soient publiées

d'Antarès (α Scorpion), sans parler de deux autres classes sans intérêt ici.

Les étoiles du type solaire sont les premières, toujours dans le même ordre, dont la température soit assez basse pour que leur spectre montre des bandes (et non plus seulement des raies) dues à l'absorption du rayonnement lumineux par des combinaisons (et non plus seulement par des éléments) qui sont principalement des hydrocarbures et de l'oxyde de titane. Le classement des étoiles résumé ci-dessus a été récemment prolongé d'une classe nouvelle, au delà de la classe M : c'est la classe S, caractérisée par de larges bandes qui semblent devoir être attribuées à l'oxyde de zirconium (1).

Les travaux de laboratoire montrent que beaucoup d'éléments chimiques donnent des spectres de bandes aussi bien que des spectres de lignes. Cependant, bien peu nombreux sont les éléments chimiques dont les bandes se rencontrent dans les spectres stellaires ; ce sont le carbone, l'hydrogène, l'azote (hydrocarbures, cyanogène), le titane (oxyde), le magnésium, le calcium (hydroxyde), l'oxygène et le zirconium (oxyde).

Dans l'article auquel sont empruntées ces précisions, J. Baxandall donne un tableau des bandes rencontrées dans divers spectres célestes, à savoir dans le spectre des étoiles du type solaire, dans celui des taches du Soleil, et dans ceux de quelques classes d'étoiles, parmi lesquelles la classe nouvelle des étoiles à zirconium (2).

Quant à la pression qui règne dans les atmosphères stellaires, elle a fait l'objet de nouvelles recherches à Mount-Wilson, en connexion avec les travaux correspondants relatifs au Soleil (3). Les spectres de Sirius, Procyon et Arcturus ont été étudiés : au niveau où se produit l'ab-

(1) F. Baxandall, *Absorption bands in celestial spectra*, M. N., t. 84 (1923-1924), p. 568.

(2) Sur la même question, du point de vue théorique : S. Rosseland, *Note on the absorption of radiation within a star*, M. N., t. 84 (1923-1924), p. 525. — Voir aussi P. Salet, *Sur le pouvoir absorbant des atmosphères des étoiles*, C. R., t. 178 (1924, 1), p. 1474.

(3) C. St. John et W. S. Adams, *Convection currents in stellar atmospheres*, Aph. J., t. 60 (1924, 2), p. 43.

sorption de la lumière, la pression est très basse et de l'ordre de celle qui a été trouvée dans le Soleil (1).

La pression s'associe avec les courants gazeux le long de la ligne de visée pour provoquer le déplacement des raies spectrales. La discussion des observations a pour objet de distinguer les parts de l'une et de l'autre de ces causes. Les déplacements des raies spectrales ne sont pas proportionnels aux longueurs d'onde, comme ce serait le cas s'il s'agissait d'un milieu absorbant se déplaçant tout d'une pièce le long de la ligne de visée. Les divers milieux absorbants de constitutions chimiques différentes se trouvent à des niveaux différents dans l'atmosphère de l'étoile. C'est ainsi que l'étude du spectre permet la détermination des courants ascendants et descendants dans les diverses couches de cette atmosphère. Les facteurs en présence sont si nombreux que les conclusions ne peuvent être que provisoires : dans un groupe d'étoiles, toutes naines ou toutes géantes, l'intensité moyenne des courants gazeux augmente avec la température ; dans deux étoiles du même type spectral, et par conséquent de températures voisines, l'une naine et l'autre géante, la circulation atmosphérique est plus intense dans l'étoile géante que dans l'étoile naine ; enfin, toutes autres choses égales, les courants gazeux sont plus intenses dans les atmosphères des étoiles variables (2).

(1) Les recherches relatives aux pressions ne peuvent pas être séparées de recherches relatives aux températures, et les résultats obtenus ont été les suivants : Soleil, 5800°; Sirius, 8800° ; Procyon, 6400°; Arcturus, 3900°.

(2) Travaux théoriques récents sur la thermodynamique des atmosphères stellaires : M. C. Johnson, *Cumulative ionisation in stellar atmospheres*, M. N., t. 84 (1923-1924), p. 516 ; A. Véronnet, *Équilibre adiabatique d'un astre gazeux*, C. R., t. 178 (1924, 1), p. 692 ; H. Vogt, *Der innere Aufbau der Sterne*, A. N., t. 222 (1924), n° 5311.

La question de l'équilibre thermodynamique des étoiles est liée de très près à celle de l'*évolution stellaire* dont il a été parlé à diverses reprises dans ces R.A. des années précédentes, en particulier la R.A. de l'an dernier dans laquelle on voyait comment les travaux d'Eddington pouvaient faire mettre en doute la réalité de la distinction entre les étoiles géantes et les étoiles naines : R.Q.S., 4e série, t. 6 (1924, 2), p. 177 (p. 28 du t. à p.). M. Hamy vient de publier une note préliminaire relative à la même question : *L'évolution des étoiles et le diamètre solaire*, C. R., t. 179 (1924, 2), p. 1012. — Après

## STRUCTURE DE L'UNIVERS

**Les Nuées de Magellan.** — D'après Kapteyn et ses disciples, le Soleil appartient à un amas stellaire ayant la forme générale d'un ellipsoïde de révolution très aplati ; le diamètre équatorial de cet amas est de l'ordre de 60 000 années de lumière, tandis que son diamètre transversal est dix fois moindre ; la densité stellaire décroît du centre aux bords ; le Soleil se trouve dans le voisinage du centre, à environ 2200 années de lumière de celui-ci, et l'immense amas stellaire que nous appelons la Voie lactée est, tout autour du ciel, la superposition des étoiles qui, en perspective, s'accumulent surtout dans le voisinage du plan moyen de notre univers (1).

avoir rappelé la distinction entre naines et géantes, les hypothèses de Lockyer et de Russell sur l'évolution stellaire et les travaux d'Eddington, avec les difficultés qu'ils provoquent, l'auteur attire l'attention sur l'impossibilité de toute observation directe qui soit de quelque secours dans la résolution de ce problème : « L'évolution stellaire exige des durées fabuleusement étendues qui font obstacle à la vérification directe des hypothèses que l'on peut émettre à ce sujet. Avant que les spectres des étoiles aient éprouvé des variations sensibles au cours des millénaires, les documents actuels auront disparu... Mais il y a une étoile particulière qui, en raison de sa proximité, peut être soumise à des investigations ne faisant pas intervenir les variations à longue échéance de son spectre, pour l'étude de son évolution : c'est le Soleil. On peut, en principe, attaquer la question de la durée de son évolution, en cherchant à mesurer la contraction séculaire de l'astre, c'est-à-dire la diminution de son diamètre angulaire ». Mais qu'est-ce que le diamètre du Soleil ? Son diamètre angulaire change avec l'instrument employé, avec l'intensité de l'image focale et l'éclairement du champ sur lequel on le mesure. (C. André, *Traité d'Astronomie stellaire*, t. 1, p. 38). Aussi M. Hamy cherche-t-il, par le calcul, quel serait le diamètre vrai de l'astre, tel qu'on l'observerait si le phénomène de la réfraction était inexistant. Le problème est résolu dans le cas d'un astre dont l'éclat superficiel serait uniforme (R. A., 1921 et 1922); mais ceci n'est pas le cas du Soleil, et l'auteur fait connaître les résultats qu'il a obtenus jusqu'ici dans le cas d'un astre dont l'éclat superficiel va en diminuant, comme celui du Soleil, du centre au bord du disque.

(1) Sur la conception de Kapteyn, voir R. A., 1922, R.Q.S., 4e série, t. 4 (1923, 2), p. 218 (p. 36 du t. à p.), et R. A. 1923, Ibid., t. 6 (1924, 2), p. 184 (p. 35 du t. à p.).— Travail récent sur la distri

En dehors de la Voie lactée existent des amas locaux qui ne sont, comme les Hyades et les Pléiades (1), distants du Soleil que de quelques centaines d'années de lumière : ces amas font sûrement partie de notre univers galactique. Mais il existe d'autres amas, comme les Nuées de Magellan, qui ne se trouvent peut-être pas dans la même situation. Ces objets célestes sont étudiés depuis plusieurs années à l'observatoire de Harvard College, et les premiers résultats de ces travaux viennent d'être publiés, à titre préliminaire, par H. Shapley (2).

Dans l'hémisphère sud de la sphère étoilée, entre la Voie lactée et le pôle, s'aperçoivent deux petites taches blanchâtres : ce sont les Nuées de Magellan, la grande et la petite nuée. La première se trouve dans la constellation de la Dorade, à peu de distance du méridien qui renferme le solstice d'été, par une déclinaison de 69° sud, à 33° du plan moyen de la Voie lactée. La deuxième se trouve dans la constellation du Toucan, à quelques minutes du méridien qui renferme l'équinoxe de printemps, par une déclinaison de 73° sud, à 44° du plan moyen de la Voie lactée.

Dans les observations visuelles, la petite nuée apparaît comme une formation ovale dont les dimensions extrêmes sont d'environ 2° et 1° ; dans les observations photographiques aux grands instruments des observatoires américains, c'est une formation quasi circulaire, avec un diamètre moyen de 3°,6. Les mêmes observations soignées montrent la grande nuée comme une formation circulaire, avec un diamètre moyen deux fois plus grand.

La plaque photographique révèle dans les Nuées de

bution des étoiles dans la Voie lactée : J. Hopmann, *Auswerkung der Isophotenkarte der Milchstrasse*, A. N., t. 222 (1924), n° 5310.

(1) Un catalogue de 104 étoiles des Pléiades vient d'être publié : A. König, *Photographische Vermessung der Plejaden*, A. N., t. 222 (1924), n° 5316.

(2) H. Shapley, *The Magellanic Clouds* (H.C.O., *circulaires* 255, 260, 268, 271 : I, *The distance and linear dimensions of the small cloud* ; II, *The luminosity curve for giant stars* ; III, *The distance and linear dimensions of the large cloud* ; IV (avec H. Wilson), *The absolute magnitude of nebulae, clusters, and peculiar stars in the large cloud*. — Voir aussi : K. Lundmark, *The distance of the large magellanic cloud*, Obs., t. 47 (1924), p. 276.

Magellan l'existence de plusieurs centaines de milliers d'étoiles ; aucune ne peut être distinguée à l'œil nu. De plus, la grande Nuée, en particulier, se montre riche en nébuleuses et en amas globulaires.

Les Nuées de Magellan sont certainement trop éloignées pour que leur distance puisse se mesurer par la détermination directe de la parallaxe, après (au moins) deux observations effectuées en des instants où la Terre se trouve aux extrémités d'un même diamètre de son orbite. Heureusement, les amas étudiés renferment un grand nombre de ces étoiles variables dites céphéides, caractérisées principalement par la brièveté de leur période lumineuse, qui n'est que de quelques jours (1). Or, on sait qu'il y a chez les céphéides une relation entre l'éclat (maximum) et la période umineuse (2).

La grandeur d'une étoile donnée dépend évidemment de la distance de l'observateur. La distance s'exprime en années de lumière ou au moyen de la parallaxe, qui est un angle auquel elle est inversement proportionnelle : à une parallaxe d'une seconde correspond une distance de 1190 jours de lumière ; cette distance porte le nom de *parsec*, et on appelle *grandeur absolue* d'une étoile la grandeur qu'elle aurait pour un observateur situé à un parsec de distance.

L'observation d'une céphéide fait connaître sa période lumineuse, et, par conséquent, sa grandeur absolue. La comparaison de la grandeur absolue et de la grandeur apparente permet le calcul de la distance.

(1) La question des céphéides a été abordée à plusieurs reprises dans les R. A. des années précédentes. Elle vient de faire l'objet d'un ouvrage important de F. Henroteau, *The Cepheid problem*, dans les PUBLICATIONS OF THE DOMINION OBSERVATORY OTTAWA, t. 9, *Astrophysics*, n° 1 (1925). Ce travail devra être analysé dans la R. A. de l'an prochain,

(2) Cette relation est basée sur le postulat que la densité moyenne d'une céphéide soit fonction de sa période lumineuse. D'autre part, la température d'une étoile est fonction de sa densité et de sa masse, tandis que la température est liée aux caractéristiques du spectre. Ainsi, les caractéristiques du spectre ne dépendent que de la période lumineuse et de la grandeur absolue. Le spectre et la période lumineuse sont accessibles à l'observation et la loi qui vient d'être rappelée permet le calcul de la grandeur absolue.

Dans la petite nuée, parmi les étoiles étudiées, la grandeur de la plus brillante est 6,73, et celle des étoiles les plus faibles est comprise entre 17 et 18. Les céphéides observées dans la petite nuée ont été réparties en quatre groupes et les grandeurs (photographiques) moyennes des étoiles de ces groupes sont 16,13, 15,98, 15,76, 15,19 ; les grandeurs absolues moyennes (déduites des périodes lumineuses) sont respectivement — 1,52, — 2,06, — 2,77, — 3,68, à quoi correspondent des parallaxes de 0″,000035, 0″,000031, 0″,000028, 0″,000029, et une parallaxe moyenne de 0,000032. C'est une distance de 31 000 parsecs ou de 100 000 années de lumière. Il en résulte, pour le diamètre de la plus petite nuée, 6500 années de lumière, c'est-à-dire cinquante fois la distance de la Terre aux Hyades (1).

Les travaux de Harvard font attribuer aux amas de Magellan une richesse stellaire bien supérieure à ce qu'on pensait jusqu'ici. On estimait à 100 000 le nombre des étoiles de la grande nuée, à 200 000 celui de la petite nuée. Les astronomes américains ont compté, dans la petite nuée, 500 000 étoiles dont la grandeur est au moins égale à 18 ; 90 000 dont la grandeur va de 17 à 18 ; 16 000 de 16 à 17, etc. Les trois cents étoiles les plus brillantes de la petite nuée ont une grandeur apparente visuelle égale à —7,0. Ce sont (avec quelques étoiles de la grande nuée) les étoiles les plus brillantes que l'on connaisse. Au voisinage du Soleil, les étoiles dont la grandeur absolue est la plus grande

(1) Le déplacement des raies spectrales fait attribuer à la petite nuée une vitesse d'éloignement de 170 km par seconde, c'est-à-dire de 536 années de lumière par million d'années. Pour autant qu'on puisse lui attribuer un mouvement rectiligne et uniforme, on en déduit que la petite nuée s'est trouvée dans le plan moyen de la Voie lactée, il y a 190 millions d'années. H. Shapley tire de cette observation des conséquences cosmogoniques. Mais il y a là une extrapolation bien audacieuse. De plus, on sait que tous les objets célestes lointains, et en particulier les nébuleuses spirales, sont étonnamment d'accord pour fuir la région du Soleil avec des vitesses considérables. Les relativistes soutiennent qu'il n'y a là qu'une interprétation inexacte du déplacement des raies spectrales vers le rouge ; pour eux, ce déplacement est, en ordre principal, celui qui doit se manifester lorsque la source lumineuse (ou le milieu absorbant) appartient à un champ gravifique intense.

sont : α Grand Chien ou Sirius, —3,7 ; α Aigle ou Altaïr, —2,6 ; α Petit Chien ou Procyon, —2,05. Ceci signifie, en particulier, que l'éclat des étoiles brillantes de la petite nuée de Magellan est cinquante fois plus grand que celui de Sirius. Leur éclat l'emporte sur celui des étoiles les plus brillantes des amas globulaires ; elles sont plus de 50 000 fois plus lumineuses que le Soleil. Si, eu égard à leur spectre, on leur applique la relation habituellement vérifiée entre les caractéristiques du spectre et la luminosité par unité de surface, on déduit leurs dimensions absolues ; ce sont des étoiles géantes beaucoup plus grandes que α Orion (Betelgeuse) et α Scorpion (Antarès) : leur diamètre linéaire est de l'ordre du milliard de kilomètres et leurs grands cercles sont voisins d'avoir les dimensions de l'orbite de Jupiter.

La distance de la grande nuée de Magellan a été déduite de l'observation de 18 céphéides dont la période est moindre que huit jours et dont la grandeur photographique moyenne est 16,22 ; la parallaxe moyenne correspondante est 0″,000029, ce qui exprime une distance de 110 000 années de lumière. Le diamètre linéaire de la grande nuée est de 13 000 années de lumière. Centrée sur le Soleil, elle engloberait les étoiles brillantes à hélium de Persée, d'Orion, du Centaure et du Scorpion ; elle engloberait aussi beaucoup d'amas de la Voie lactée. Son rayon est dix fois la distance du Soleil à la grande nébuleuse d'Orion.

Parmi les étoiles de la grande nuée, 32 étoiles à raies brillantes ont été particulièrement étudiées. La grandeur absolue de l'une d'elles est comprise entre —7,9 et —7,5, ce qui indique un éclat un peu plus considérable que celui des étoiles les plus brillantes de la petite nuée. Enfin, l'étoile la plus brillante de l'amas, S Dorade, de grandeur apparente 9, a une grandeur absolue —8,9 ; c'est décidément l'étoile la plus lumineuse que l'on connaisse, avec un éclat 500 000 fois supérieur à celui du Soleil (1).

(1) Le passage de la grandeur apparente, 9, à la grandeur absolue — 8,9, se fait d'après la distance de la grande nuée, 110 000 années de lumière. Devant ce résultat d'une étoile 500 000 fois plus lumineuse que le Soleil, on se demande si l'étoile étudiée fait vraiment partie de la nuée ; elle pourrait se trouver au devant, à une bien moindre distance. H. Shapley a répondu à cette objection (H.C.O.,

Quant aux nébuleuses que renferme, au nombre d'une vingtaine, la grande nuée, elles sont toutes extrêmement brillantes (1). L'une de ces nébuleuses, 30 Dorade, est de loin la plus grande et la plus brillante des nébuleuses connues ; sa grandeur absolue est —14 et son diamètre est d'une centaine d'années de lumière. La grande nébuleuse d'Orion est distante de 600 années de lumière, sa grandeur absolue est —5 et son diamètre moyen est d'une année. Si la principale nébuleuse de la grande nuée de Magellan se trouvait là où nous voyons, un peu en dessous des Trois Rois, la nébuleuse d'Orion, elle s'étendrait à la constellation presque entière, englobant tout le quadrilatère qui caractérise celle-ci. A cette distance, sa grandeur apparente totale serait —7,5, comprise entre celles de Vénus et de la pleine Lune, et sa lumière porterait des ombres vives à la surface de la Terre (2).

Si l'on veut continuer de considérer les Nuées de Magellan comme faisant partie de notre univers galactique, au même titre que les amas globulaires de la Voie lactée, on voit combien il est nécessaire d'admettre, pour cet univers

*bulletin* 814, mars 1925) : les photographies à longue pose montrent des traces de nébulosités intimement associées à l'étoile aussi bien que dans les autres parties de l'amas ; le type spectral de cette étoile est extrêmement rare, sauf dans la grande nuée de Magellan et dans la Voie lactée ; la même nuée renferme huit autres étoiles du même type spectral et les grandeurs absolues de ces astres vont de —4,9 à —6,3, de sorte qu'un éclat extrêmement grand est caractéristique des étoiles appartenant à ce type spectral.

(1) Toutes ces nébuleuses de la grande nuée s'éloignent de la région solaire avec des vitesses de l'ordre de 300 km par seconde, à quoi il y a lieu d'appliquer la remarque faite dans une note précédente, sur la possibilité de confusion de l'effet Doppler-Fizeau et de l'effet Einstein sur la position des raies du spectre.

(2) Dans H.C.O., *bulletin* 816 (avril 1925), H. Shapley compare la nébuleuse géante de la grande nuée de Magellan avec une nébuleuse gazeuse irrégulière qui se trouve à l'extrémité de l'un des bras de la nébuleuse spirale dite Messier 33 (dans les Poissons, près de α Triangle, entre α Bélier et β Andromède). Cette dernière nébuleuse est dix fois plus éloignée que la nuée de Magellan, ce qui lui donne une distance de l'ordre du million d'années de lumière, et son diamètre est de 180 années de lumière. — Le même *Bulletin* compare la grande nuée de Magellan et la nébuleuse spirale Messier 33.

galactique, des dimensions bien plus grandes que les dimensions proposées par Kapteyn (1).

(1) Dans la constellation du Sagittaire, couvrant un ovale de 5′ sur 10′, se trouve un groupe remarquable d'étoiles et de nébuleuses. Ses étoiles les plus brillantes ont une grandeur (apparente) comprise entre 18 et 19, et sa constitution semble voisine de celle des nuées de Magellan. H. Shapley a estimé sa distance et est arrivé à un nombre d'années de lumière de l'ordre du million. (H.C.O., *bulletin* 796, déc. 1923). Cette formation renferme deux nébuleuses diffuses de 15″ de diamètre, semblables aux nébuleuses diffuses de la grande nuée de Magellan. Cet amas du Sagittaire serait un grand nuage stellaire au moins trois ou quatre fois plus éloigné que les amas globulaires les plus lointains connus ; il faudrait bien admettre qu'il est situé en dehors de notre univers galactique. — La distance de cet amas a été estimée par comparaison avec la grande nuée de Magellan, eu égard au type spectral moyen des étoiles qui le composent et auxquelles on est amené à attribuer une grandeur absolue de — 3 à — 4. — Voir aussi H. Shapley, *Notes bearing on the distances of clusters*, H.O.C., *circ.* 237.

Dans la discussion relative à la structure de l'Univers, on sait quelle est l'importance des nébuleuses spirales dont chacune, dans la théorie des « univers-îles » constitue un univers distinct, analogue à notre univers galactique : R. A. 1923, R. Q. S., 4e série, t. 6 (1924, 2), p. 184 (p. 35 du t. à p.). H. Curtis, *The spiral nebulae and the constitution of the Universe*, SCIENTIA, t. 35 (1924, 1), La question ne peut pas être reprise ici cette année, et on doit se contenter de signaler quelques travaux récents. — Par l'observation d'une douzaine de céphéides dans la nébuleuse d'Andromède, Hubble a estimé à 950 000 années de lumière la distance de cette nébuleuse (P. A., t. 33, 1925, p. 143). — K. Lundmark part de l'hypothèse que les nébuleuses spirales appartiendraient à une même famille et auraient une sorte de mouvement d'ensemble ; le passage des observations aux équations qui expriment cette hypothèse renferme une inconnue liée à ce que l'auteur appelle la distance moyenne des nébuleuses spirales : cette distance serait de l'ordre de 70 000 années de lumière : *Determination of the apices and the mean parallax of spirals*, OBS., t. 47 (1924), p. 279. — De nombreuses observations sont publiées et discutées dans : C. Wirtz, *Aus der Statistik der Spiralnebel*, A. N., t. 222 (1924), n° 5307. — Les travaux suivants ont un caractère théorique ou cosmogonique : C. Wirtz, *De Sitters Kosmologie und die Radialbewegungen der Spiralnebel*, Ibid., n° 5306 ; P. Parchomenko, *Eine von den möglichen Interpretationen der inneren Bewegung in den Spiralnebeln*, Ibid., n° 5325 ; J. Jeans, *Internal motions in spiral nebulae*, M. N., t. 84 (1923-1924), p. 60 ; R. Fountain, *The mechanism of spiral nebulae*, B.A.A., t. 34 (1924), p. 278 ; D. Perrine, *Spiral and structureless nebulae*, OBS., t. 47 (1924), p. 218 ; J. Jeans, *Note on the distances and structure of spiral nebulae*, M. N., t. 85 (1924-1925), p. 531.

L'Astronomie est une science trop vaste pour qu'une quarantaine de pages suffisent à donner une idée des principaux travaux dont elle a fait, en une année, l'objet. Cette Revue a atteint les limites qui lui sont imposées, alors que son programme est loin d'être épuisé. Le dernier chapitre, *Structure de l'Univers*, devait parler des mouvements stellaires, et, en particulier, du mouvement du Soleil par rapport à l'ensemble des étoiles. La Lune et les planètes ont donné lieu récemment à de nombreuses observations ; celles-ci se sont multipliées à l'occasion du passage de Mercure devant le Soleil le 8 mai 1924, et à l'occasion du passage de Mars à son minimum de distance à la Terre en 1924. Ces questions devront être reprises dans la Revue de l'an prochain, et il faudra, dans leur exposé, remonter jusqu'au beau volume publié en 1923 par l'observatoire Jarry-Desloges, à Sétif : le tome VI des *Observations des surfaces planétaires*. — Il est cependant difficile de ne pas signaler dès maintenant la découverte d'une petite planète (1924 T D) remarquable par la grande excentricité de son orbite. Signalée par Baade, à Bergedorf, en octobre 1923, elle fut observée à diverses reprises au début de 1924. Le calcul de son orbite lui attribue une durée de révolution de 4,33 années et un grand axe égal à 2,64, où le grand axe de l'orbite terrestre est pris pour unité (Mars 1,52). Son excentricité est 0,542, ce qui place son périhélie à mi-distance des orbites de la Terre et de Mars. On ne connaît qu'un astéroïde dont l'orbite ait une excentricité plus grande : Hidalgo (944), excentricité 0,653 ; tandis que 719 (Albert) et 887 (Alinda) ont des excentricités presque aussi considérables: 0,540 et 0,532 respectivement. Les excentricités de ces orbites planétaires l'emportent sur celles de plusieurs orbites cométaires.

N° 23.

# *La méthode des moindres carrés d'après M. É. Goedseels*

*pàr M. M. Alliaume*

Les circonstances ne permettent pas à M. Goedseels d'entreprendre la publication d'une cinquième édition de sa *Théorie des erreurs d'observation* (1). Nous devons lui être reconnaissants d'avoir fait paraître une courte brochure intitulée *Exposé rigoureux de la méthode des moindres carrés*, dans laquelle il reproduit, avec des précisions nouvelles, ce que son ouvrage renfermait d'essentiel sur la méthode des moindres carrés, considérée indépendamment du Calcul des probabilités.

Les Annales de la Société scientifique de Bruxelles de 1900 à 1905 témoignent de la lutte qu'a dû livrer M. Goedseels pour faire reconnaître son importance à la notion d'*approximation*, si simple, si claire et, semble-t-il aujourd'hui, si inévitable.

Une série d'observations s'exprime par un système d'équations dont le nombre est supérieur au nombre des inconnues. Les erreurs (réelles et fictives) d'observation rendent ce système incompatible. Un terme complémentaire, un *résidu*, est introduit dans chaque équation pour rétablir la compatibilité du système. Ces résidus sont inconnus, et, cette fois, c'est le nombre des inconnues qui l'emporte sur le nombre des équations. Il n'y aura cependant pas indétermination ; car l'introduction de l'approximation va imposer aux résidus des conditions

(1) É. Goedseels, *Théorie des erreurs d'observation et éléments du Calcul des probabilités*, quatrième édition, Paris, Gauthier-Villars, 1914. — Compte-rendu dans la Revue des Questions scientifiques 3me série, t. 28 (1920, 2), pp. 225-231.

nouvelles qui préciseront les circonstances algébriques du problème et permettront la résolution rigoureuse de celui-ci.

L'application de ces principes constitue,suivant les cas,soit la méthode la plus approximative, soit la méthode de l'approximation minimum.

Ces méthodes comportent des calculs que beaucoup de praticiens trouveront trop laborieux. C'est à l'intention de ces praticiens que M. Goedseels substitue à l'approximation proprement dite une quantité qui ne lui est jamais inférieure et à laquelle il donne le nom d'*approximation quadratique*. Cette substitution et l'application des mêmes principes permettent la constitution d'une méthode de la théorie des erreurs dans laquelle les développements algébriques peuvent, indépendamment des données numériques, être poussés jusqu'aux formules donnant les valeurs finales des inconnues. Dans cette méthode, qui devrait s'appeler *méthode quadratiquement la plus approximative*, les valeurs finales des inconnues sont précisément celles auxquelles aboutit, sous sa forme traditionnelle, la méthode des moindres carrés.Le travail de M. Goedseels constitue donc bien un *exposé rigoureux* de la méthode des moindres carrés, exposé indépendant de toutes les hypothèses plus ou moins plausibles aux prix desquelles les mêmes résultats sont obtenus par le Calcul des probabilités.

* * *

Mais ce n'est pas sans discussion, que l'on peut, comme on le fait presque toujours, adopter les valeurs finales de la méthode des moindres carrés. Il existe une expression, *l'erreur moyenne*, dont le rapprochement avec l'approximation des observations permet de dire quelle est l'approximation de la valeur finale de l'inconnue considérée. Ce rapprochement permet, en particulier, de se rendre compte des circonstances dans lesquelles l'approximation de la valeur finale est égale à zéro, et dans lesquelles, par conséquent, cette valeur finale doit être considérée comme *exacte*. On y aperçoit aussi dans quelles conditions la valeur finale de l'inconnue considérée ne peut pas, sous peine d'absurdité, être adoptée, sauf à modifier en conséquence la grandeur de l'approximation des observations.

Les propositions dans lesquelles l'auteur précise ces conditions et établit leurs conséquences doivent être considérées comme fondamen-

tales. Elles sont destinées à devenir classiques. Il sera juste de leur donner le nom de *Théorèmes de M. Goedseels.*

* * *

Malgré ce que ces propositions ont d'essentiel, la lecture de l'*Exposé rigoureux* ne suffit pas à donner une idée exacte de l'importance des travaux de M. Goedseels dans le domaine de la Théorie des erreurs. Le lecteur aura intérêt à recourir à l'ouvrage étendu sur ce sujet pour éviter les idées fausses que pourraient lui donner de nombreuses publications, même récentes, fort répandues.

En particulier, les auteurs ont souvent discuté les diverses manières de combiner les résultats de plusieurs mesures d'une même grandeur *plausible* de celle-ci. — On va supposer ici que les mesures ont été effectuées dans les mêmes circonstances, avec le même poids, la même approximation.

Si, *primo*, par la valeur *la plus avantageuse*, ou *la plus plausible*, on entend la valeur *la plus probable*, si, *secundo*, on convient d'adopter la loi exponentielle (de Gauss) pour loi de probabilité des erreurs, et si, *tertio*, on ne fait aucune restriction sur l'approximation des observations, il est bien certain que la moyenne arithmétique des mesures est la valeur la plus avantageuse (ou la plus plausible) de la grandeur mesurée.

En ce qui concerne la deuxième de ces conditions, il semble bien, pour des raisons plus pratiques que théoriques, que la loi exponentielle de Gauss est celle dont l'adoption est le plus fréquemment indiquée.

Quant à la troisième condition, il faut rappeler que la moyenne arithmétique

$$\frac{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}{n}$$

des $n$ mesures $m_i$, rangées ici dans l'ordre non décroissant, implique une approximation des mesures au moins égale à celle des deux différences

$$\frac{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}{n} - m_1,$$

$$m_n - \frac{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}{n}$$

dont la valeur absolue est la plus grande.

Mais la valeur la plus probable n'est pas nécessairement considérée comme la plus plausible ; la notion de probabilité n'est pas forcément attachée à celle de valeur finale la plus avantageuse, et l'on peut adopter pour celle-ci la définition suivante : que ce soit, parmi les valeurs *possibles* de la valeur finale, celle dont l'*approximation est minimum*.

Pour une approximation M commune aux diverses mesures, l'intervalle des valeurs possibles de la grandeur mesurée va de $(m_n - M)$ à $(m_1 + M)$, et la condition

$$m_n - M \leqslant m_1 + M$$

exprime la compatibilité des mesures et de l'approximation indiquée.

Un nombre quelconque $m$ appartenant à cet intervalle a pour approximation celle des deux différences

$$m - (m_n - M),$$

$$(m_1 + M) - m$$

dont la valeur absolue est la plus grande.

La valeur finale la plus avantageuse, au sens actuel indépendant de la notion de probabilité, est, quelle que soit l'approximation M, égale à la demi-somme des valeurs extrêmes.

On a reproché à cette valeur finale de ne s'exprimer précisément qu'au moyen des deux mesures « les plus suspectes». Mais, par hypothèse, toutes les mesures ont été faites avec la même approximation, et il n'y a pas de mesures plus « suspectes » les unes que les autres. La recherche de la valeur finale la plus approximative conclut à un nombre différent de la somme des deux mesures extrêmes lorsque l'observateur attribue des approximations différentes aux diverses observations.

D'autre part, si, par la substitution de l'approximation quadratique à l'approximation proprement dite, on adopte plutôt, mais toujours indépendamment de la notion de probabilité, la valeur quadratiquement la plus approximative comme valeur la plus avantageuse, on retrouve, dans le cas de mesures effectuées dans les mêmes circonsstances, une valeur finale égale à la moyenne arithmétique des résultats de toutes les mesures, en accord avec la méthode des moindres carrés, mais sans égard aux conditions précaires énoncées ci-dessus et dans lesquelles doit se placer le Calcul des probabilités pour arriver à la justification de cette méthode.

N° 24.

# *Exposé rigoureux de la méthode des moindres carrés*

*par M. É. Goedseels*

La 4e édition de notre *Théorie des erreurs d'observation,* publiée en 1914, étant quasi épuisée, il conviendrait que nous fassions paraître une 5e édition. Mais les circonstances nous empêchent d'entreprendre cette nouvelle publication. Nous nous bornons à faire paraître le présent *Exposé rigoureux de la méthode des moindres carrés*, parce qu'on emploie encore beaucoup cette méthode de nos jours, et que nos idées à ce sujet sont en contradiction avec celles de la plupart des auteurs, sinon de tous.

Pour ne pas mêler des discussions au cours de notre exposé, nous insérerons les quelques explications suivantes dans cet Avant-propos.

Les constructeurs d'instruments scientifiques, les observateurs et leurs aides, en un mot, tous ceux qui ont une influence quelconque sur les résultats des observations scientifiques, emploient tous les moyens pour que les erreurs inévitables de ces résultats soient aussi voisines que possible de zéro.

Les calculateurs doivent, à notre avis, poursuivre le même objectif. Telle était la manière de voir de Legendre.

En effet, en exposant le premier, en 1805, la méthode des moindres carrés, dans son mémoire intitulé *Nouvelles méthodes pour la détermination des orbites des comètes,* le grand, mathématicien français émettait l'avis que, dans les calculs, « il faut surtout faire en sorte que les erreurs extrêmes, sans avoir égard à leurs signes, soient renfermées dans les limites les plus étroites qu'il est possible ».

Gauss publia à son tour la méthode des moindres carrés en 1809, dans sa *Theoria motus corporum cœlestium*, mais il voulut faire mieux que Legendre. Il tenta de démontrer que la

méthode en question fournit les valeurs les plus probables des inconnues.

Il faut croire que les idées de Gauss furent combattues de son temps, et qu'il reconnut le bien-fondé des critiques de ses contradicteurs, car il publia en 1821 et compléta en 1826 un exposé dans lequel il n'est plus question des valeurs les plus probables.

L'auteur allemand y assimile à un jeu la résolution des systèmes d'équations affectées d'erreurs d'observation, et il admet, comme un postulat échappant complètement au raisonnement mathématique, que la meilleure manière de jouer est d'appliquer la méthode des moindres carrés.

Dans une lettre adressée le 23 août 1831 à Encke (Gauss Werke, t. VIII), Gauss ne se borne pas à condamner son exposé de 1809, mais il condamne même toute autre méthode qui aurait la détermination des valeurs les plus probables comme but. La probabilité d'une valeur la plus probable, ajoute Gauss, est infiniment petite, et une telle valeur a un faible intérêt pratique.

Nous ne nous inclinons pas devant l'ostracisme prononcé par Gauss contre les valeurs les plus probables.

Nous avons montré, en effet, dans notre 4e édition, que dans certains cas particuliers la méthode des moindres carrés peut fournir des valeurs ayant des probabilités très appréciables.

Quant à l'exposé de 1821-26, dans lequel l'auteur nons eulement ne démontre rien, mais pose en principe qu'il n'y a rien à démontrer, nous y sommes tout à faitre rebelle. D'une manière générale, nous nous sommes inspiré des idées de Legendre, et avons choisi les valeurs les plus approximatives comme but de nos recherches.

Nous arrivons ainsi, par une voie entièrement rigoureuse, à la méthode dite des moindres carrés.

# CHAPITRE PREMIER

## PRÉLIMINAIRES

### 1. Équations de condition.

Les équations sur lesquelles on opère dans la théorie des erreurs en général et dans la méthode des moindres carrés en particulier, sont des équations linéaires à une ou plusieurs inconnues, $x$, $y$, $z$,...

Nous considérerons, pour fixer les idées, des équations à trois inconnues de la forme

$$(1) \qquad a_i x + b_i y + c_i z = m_i + r_i, \qquad i = 1, 2, 3, \ldots n ;$$

Les quantités $x$, $y$, $z$ sont les inconnues *principales* ou proprement dites. Les quantités $r_i$ sont des erreurs inconnues corrigeant, par hypothèse, toutes les imperfections des équations dans lesquelles $r_i$ serait supprimé.

Ces imperfections proviennent des quantités fournies par des observations, de la suppression des restes dans les développements en séries effectués pour rendre linéaires des expressions qui ne l'étaient pas primitivement, ou de n'importe quelles autres causes.

Nous désignerons par M une borne supérieure quelconque des valeurs absolues des erreurs inconnues $r_i$.

Dans la pratique on tâche d'arriver à des équations pour lesquelles M ait une valeur aussi petite que possible. On devra surtout tenir compte, dans le choix de M, des théorèmes fondamentaux démontrés dans notre chapitre III.

Remarquons enfin que nous nous occuperons exclusivement de la détermination de l'inconnue $x$, mais que nos raisonnements s'appliqueront textuellement aux autres inconnues principales

### 2. Solutions absurdes et solutions possibles.

Nous verrons plus loin que le méthode des moindres carrés peut conduire à des solutions qui sont absurdes parce que les

valeurs correspondantes des erreurs $r_i$ ne sont pas inférieures, en valeur absolue, à M.

D'où provient éventuellement cette anomalie ? Faut-il augmenter M ? Faut-il reviser entièrement les équations ? — Ces questions ne sont pas de la compétence du mathématicien. Elles doivent être résolues par les praticiens qui nous soumettent les résultats de leurs observations.

Signalons seulement que le moyen le plus simple est, dans tous les cas, d'augmenter suffisamment M.

Lorsque les solutions ne sont pas absurdes, nous les appelons des *solutions possibles*.

### 3. Équations normales.

Nous représenterons les sommes telles que

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n$$

par les notations $(ab)$, $\{ab\}$, etc.

Cela étant, on appelle équations *normales* les équations

$$\begin{aligned} &(aa)X + (ab)Y + (ac)Z = (am), \\ &(ba)X + (bb)Y + (bc)Z = (bm), \\ &(ca)X + (cb)Y + (cc)Z = (cm). \end{aligned} \qquad (2)$$

Les solutions X, Y, Z seront appelées les valeurs normales des inconnues principales $x$, $y$, $z$ ; et toute fonction F(X, Y, Z) sera appelée valeur *normale* de la fonction F($x$, $y$, $z$).

### 4. Moindres carrés.

**Théorème.** — *La valeur normale* (RR) *de la somme* (rr) *des carrés des erreurs* r *est minimun.*

En effet, posons :

$$\begin{aligned} x &= X + h, \\ y &= Y + k, \\ z &= Z + l. \end{aligned}$$

En tenant compte des équations normales, on a :

$$(rr) = (RR) + \{(a_ih + b_i + kc_il)^2\}.$$

La valeur normale (RR) est donc la plus petite valeur possible de la somme $(rr)$.

Cette propriété a fait donner le nom de *méthode des moindres carrés* à celle qui consiste à attribuer les valeurs normales X, Y, Z aux inconnues principales $x$, $y$, $z$.

**5. Erreur moyenne.**

On a donné le nom d'*erreur moyenne* à la racine carrée de la moyenne arithmétique des carrés des erreurs normales.

Si nous désignons cette moyenne par R, nous avons donc, par définition :

$$R^2 = (RR) : n.$$

On peut calculer cette erreur moyenne en remplaçant les inconnues normales par leurs valeurs dans l'égalité

$$R^2 = \{(ax + by + cz - m)^2\} : n ;$$

on trouve ainsi :

$$n.R^2 = \begin{vmatrix} (mm), & (am), & (bm), & (cm) \\ (ma), & (aa), & (ba), & (ca) \\ (mb), & (ab), & (bb), & (cb) \\ (mc), & (ac), & (bc), & (cc) \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} (aa), & (ba), & (ca) \\ (ab), & (bb), & (cb) \\ (ac), & (bc), & (cc) \end{vmatrix}$$

En représentant le second membre ci-dessus par $(1 : a)$, il vient :

$$R = \sqrt{1 : an}, \tag{3}$$

*Remarque.* — On s'imagine généralement qu'une série d'équations de condition est d'autant meilleure que l'erreur moyenne R est plus voisine de zéro.

Nous verrons plus loin que cette manière de voir n'est pas fondée.

# CHAPITRE II

## DES APPROXIMATIONS

**6. Problème.**

*On donne une série d'équation, de condition,*

$$a_i x + b_i y + c_i z = m_i + r_i,$$

*une borne supérieure* M *des valeurs absolues des erreurs* $r_i$, *et une valeur quelconque* u *attribuée à* x.

*On demande une borne supérieure ou approximation de l'erreur inconnue de* u.

Multiplions les équations de condition par des facteurs $p_i$ vérifiant les relations

$$(4) \qquad \begin{cases} (ap) = 1, \\ (bp) = 0, \\ (cp) = 0, \\ (mp) = u\ ; \end{cases}$$

et additionnons ensuite les équations membre à membre. Il vient :

$$x = u + (pr).$$

Le produit M . (val. abs. $p$) est évidemment une borne supérieure de l'erreur inconnue $(pr)$ de $u$.

Nous avons exposé dans la 4e édition de notre *Théorie des Erreurs* des méthodes permettant de résoudre au moyen de de cette borne, M . (val. abs. $p$), les problèmes qui intéressent les observateurs.

Mais les calculs sont beaucoup trop laborieux pour la pratique. Nous avons été plus heureux en faisant un léger sacrifice, et en ayant recours à une borne supérieure un peu plus grande à laquelle nous avons donné le nom d'*approximation quadratique.*

On sait, et il est du reste facile de démontrer, qu'une somme de $n$ nombres positifs est inférieure à la racine carrée de $n$ fois la somme des carrés de ces nombres.

En vertu de ce principe, si M . (val. abs. $p$) est une borne supérieure de l'erreur $(pr)$, l'expression M . $\sqrt{n}\,(pp)$ l'est *a fortiori*.

C'est au minimum de cette expression que nous donnons le nom d'approximation quadratique de $u$.

Pour trouver ce minimum, il suffit de démontrer qu'il est atteint par les valeurs $P_i$ des multiplicateurs $p_i$ qui vérifient, outre les relations

$$(5)\qquad \begin{cases} (aP) = 1, \\ (bP) = 0, \\ (cP) = 0, \\ (mP) = u, \end{cases}$$

les $n$ équations suivantes, contenant quatre inconnues auxiliaires $r$, $t$, $s$, $v$ :

$$(6)\qquad P_i - m_i r - a_i t - b_i s - c_i v = 0.$$

Posons, à cet effet,

$$(7)\qquad p_i = P_i + h^i.$$

En remplaçant les multiplicateurs $p_i$ par ces valeurs dans les relations (4), et en y remplaçant ensuite les premiers membres des relations (5) par les seconds membres, on obtient :

$$\begin{aligned} (ah) &= 0, \\ (bh) &= 0, \\ (ch) &= 0, \\ (mh) &= 0. \end{aligned}$$

En additionnant membre à membre les équations (6), après les avoir multipliées par les facteurs respectifs $h_i$, on obtient en vertu des relations ci-dessus :

$$(Ph) = 0.$$

Mais les égalités (7) donnent :

$$(pp) = (PP) + 2(Ph) + (hh).$$

Par suite, puisque $(Ph)$ est nul,

$$(pp) = (PP) + (hh),$$

et on voit ainsi que (PP) est la plus petite valeur de $(pp)$.

En d'autres termes, l'expression M. $\sqrt{n}.\ \sqrt{(\overline{PP})}$ peut être adoptée pour approximation de $u$.

On peut trouver la valeur de cette approximation en multipliant les équations (6) par les facteurs respectifs $m_i$, en les additionnant ensuite membre à membre, et en opérant successivement de même avec les multiplicateurs $a_i$, $b_i$, $c_i$ et $P^i$.

On obtient ainsi, en tenant compte des relations (5),

$$\begin{aligned}
(mm)r + (am)t + (bm)s + (cm)v &= u,\\
(ma)r + (aa)t + (ba)s + (ca)v &= 1,\\
(mb)r + (ab)t + (bb)s + (cb)v &= 0,\\
(mc)r + (ac)t + (bc)s + (cc)v &= 0,\\
(\mathrm{PP}) - ur - t &= 0.
\end{aligned}$$

En résolvant ces équations par rapport à (PP), en employant a lettre $a$ déjà définie au n° 5, et en posant en outre

$$b = \begin{vmatrix} (ma), & (ba), & (ca) \\ (mb), & (bb), & (cb) \\ (mc), & (bc), & (cc) \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} (mm), & (am), & (bm), & (cm) \\ (ma), & (aa), & (ba), & (ca) \\ (mb), & (ab), & (bb), & (cb) \\ (mc), & (ac), & (bc), & (cc) \end{vmatrix}$$

$$c = \begin{vmatrix} (mm), & (bm), & (cm) \\ (mb), & (bb), & (cb) \\ (mc), & (bc), & (cc) \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} (mm), & (am), & (bm), & (cm) \\ (ma), & (aa), & (ba), & (ca) \\ (mb), & (ab), & (bb), & (cb) \\ (mc), & (ac), & (bc), & (cc) \end{vmatrix}$$

on trouve :

$$(\mathrm{PP}) = au^2 - 2bu + c.$$

L'approximation quadratique de $u$ vaut donc :

$$\mathrm{M}.\ \sqrt{n}.\ \sqrt{au^2 - 2bu + c}.$$

### 7. Approximation quadratique minimum.

Le trinôme $(au^2 - 2bu + c)$ étant égal à (PP), ne peut prendre des valeurs négatives. Par suite, les quantités $a$ et $c$ sont nécessairement $> 0$, et le trinôme admet une valeur minimum.

En étudiant le trinôme de la manière connue, on trouve que ce minimum vaut $(ac - b^2) : a$, et est atteint par la valeur $u = b : a$.

En remplaçant les notations $a$ et $b$ par leurs valeurs indiquées antérieurement, on voit que $b : a$ est la valeur normale X.

Nous désignons par MQ, l'approximation quadratique M. $\sqrt{n}$. $\sqrt{(ac - b^2) : a}$ de cette valeur normale.

## CHAPITRE III

### THÉORÈMES FONDAMENTAUX

**8. Hyperbole indicatrice.**

1° Nous venons de voir qu'une valeur quelconque $u$, attribuée à $x$, a pour approximation l'expression $M \cdot \sqrt{n} \cdot \sqrt{au^2 - 2bu + c}$.

Il en résulte que les ordonnées de la branche supérieure de l'hyperbole

$$y = u \pm M \cdot \sqrt{n} \cdot \sqrt{au^2 - 2bu + c} \tag{8}$$

sont des bornes supérieures de l'inconnue principale $x$, et que les ordonnées de la branche inférieure en sont des bornes inférieures. Nous donnerons à cette hyperbole le nom d'*hyperbole indicatrice.*

2° L'équation ci-dessus peut être mise sous la forme

$$(y - u)^2 = nM^2 (au^2 - 2bu + b^2 : a) + nM^2 \frac{ac - b^2}{a},$$

ou, en remplaçant $a$ par sa valeur $1 : nR^2$, et le dernier terme du second membre par la notation $M^2Q^2$, convenue à la fin du chapitre précédent,

$$\{ y - u(1 + M : R) + Mbn R \} \{ y - u(1 - M : R) \quad Mbn R \} = M^2Q^2.$$

Sous cette dernière forme on voit immédiatement que les asymptotes ont pour équations respectives :

$$y = u(1 + M : R) - Mbn R,$$
$$y = u(1 - M : R) + Mbn R.$$

3° L'ordonnée du centre, intersection des deux asymptotes, est égale à $b : a$, c'est-à-dire à la valeur normale X.

4° L'équation (8) montre que la droite

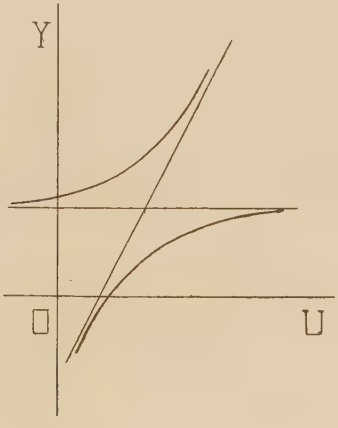
$$y = u,$$

bissectrice des axes coordonnés, est le diamètre conjugué de la direction des cordes parallèle à l'axe OY.

**9. Théorème fondamental I.**

*Lorsque l'approximation* M *des erreurs* r *d'un système d'équations de condition est égale à l'erreur moyenne* R, *et que les valeurs normales* $R_i$ *des erreurs* $r^i$ *ont des valeurs absolues égales, les solutions normales fournies par la méthode des moindres carrés sont les valeurs exactes des inconnues principales.*

En effet, supposons que les erreurs $r_i$ aient vraiment une




approximation M = R. Dans ce cas la deuxième asymptote de l'hyperbole indicatrice est la parallèle

$$y = \mathrm{M}bn\mathrm{R} = \mathrm{R}bn\mathrm{R} = b : a = \mathrm{X}$$

à l'axe OU.

Cette hyperbole se présente comme l'indique la figure ci-contre.

L'ordonnée $b : a$ ou X est la seule quantité ayant les ordonnées de la branche supérieure pour bornes supérieures, et les ordonnées de la branche inférieure pour bornes inférieures.

Puisque l'inconnue $x$ jouit aussi de ces deux propriétés, on a rigoureusement :

$$x = \mathrm{X}.$$

Le même raisonnement s'applique évidemment aux autres inconnues principales.

*Remarques.* — 1° Si les solutions normales sont les valeurs exactes des inconnues, les valeurs normales $R_i$ des erreurs $r_i$ sont les valeurs exactes de ces dernières erreurs, et doivent, comme telles, ne pas dépasser M en valeur absolue.

Puisqu'on a par hypothèse $M = R$, et qu'on a d'autre part $n \cdot R^2 = (R_i^2)$, toutes les erreurs normales $R_i$ sont nécessairement égales en valeur absolue à M.

Lorsque cette condition n'est pas remplie, on ne peut avoir $M = R$ que si certaines erreurs $R_i$ surpassent M.

Dans ce cas, l'approximation M, inférieure en valeur absolue à une ou plusieurs erreurs $R_i$, est évidemment absurde.

2° Puisque les erreurs normales $R_i$, égales en valeur absolue à M, sont les valeurs exactes des erreurs, le premier théorème fondamental n'est applicable que si les équations de condition sont affectées d'une erreur $R_i$ constante en valeur absolue.

*Exemples.* — 1° On donne les équations de condition

$$\begin{aligned} x + y &= 1 + r_1, \\ x - y &= 3 + r_2, \\ x + 2y &= 2 + r_3, \\ x + 4y &= 8 \quad r_4, \end{aligned}$$

et on attribue aux erreurs $r_i$ une approximation $M = 2$.

L'erreur moyenne R est égale à 2.

Par conséquent les valeurs normales, qui sont $X = 2$, $Y = 1$, sont les valeurs exactes des inconnues si les valeurs absolues des valeurs normales $R_1$, $R_2$, $R_3$, $R_4$ des erreurs $r_i$ sont égales à M.

Or, cette condition est remplie puisqu'on trouve :

$$2 = R_1 = -R_2 = R_3 = -R_4.$$

2° On donne des équations de condition

$$\begin{aligned} x + y &= 1 + r_1, \\ x - y &= 3 + r_2, \\ x + 2y &= 2 + r_3, \\ 3x + 3y &= 6 + r_4, \end{aligned}$$

et on attribue aux erreurs $r_i$ une approximation $M = \sqrt{\frac{2}{7}}$.

En faisant les calculs on constate que $R = M$, mais que les données sont absurdes, parce que

$$R_1 = \frac{6}{7} > M,$$

$$R_3 = \frac{4}{7} > M.$$

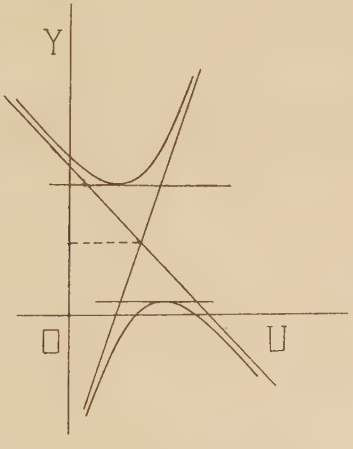
Les deux autres erreurs normales $R_2$ et $R_4$ ont des valeurs absolues $< M$.

L'absurdité disparaît si on prend $M = \frac{6}{7}$.

**10. Théorème fondamental II.**

*Lorsque l'erreur moyenne est inférieure à l'approximation* M *des erreurs* $r_i$, *et que les solutions normales fournies par la méthode des moindres carrés sont possibles, ces solutions sont les valeurs les plus approximatives des inconnues et ont des approximations* $Q\sqrt{M^2 - R^2}$.

En effet, losrque $R < M$, l'hyperbole indicatrice se présente comme l'indique la figure ci-contre.




La branche inférieure a un point d'ordonnée maximum, et la branche supérieure a un point d'ordonnée minimum.

En faisant les calculs de la manière connue, on trouve pour ces deux ordonnées extrêmes les valeurs respectives

$$\frac{b}{a} - Q\sqrt{M^2 - R^2}$$

et

$$\frac{b}{a} + Q\sqrt{M^2 - R^2}.$$

Le milieu entre ces deux valeurs est la valeur la plus approximative de $x$. Ce milieu, $b : a$, est la solution normale X.

L'approximation est la demié-tendue de l'intervalle entre les valeurs extrêmes, c'est-à-dire $Q \cdot \sqrt{M^2 - R^2}$.

Cette approximation est plus voisine de zéro que l'approximation quadratique QM trouvée précédemment pour X.

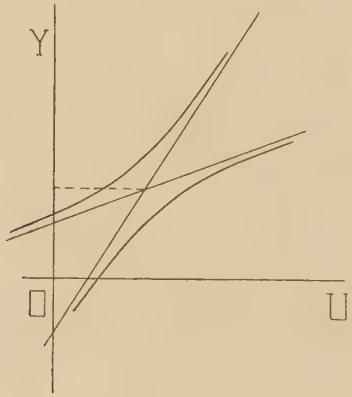
*Remarque.* — Nous avons signalé au début de notre travail que l'on considère généralement les solutions normales comme d'autant meilleures que l'erreur moyenne R est plus voisine de zéro, et nous avons ajouté que cette manière de voir n'est pas fondée. L'approximation $Q \cdot \sqrt{M^2 - R^2}$ montre que notre critique est exacte, attendu que cette approximation est d'autant plus voisine de zéro que R est plus voisin de M.

**11. Théorème fondamental III.**

*Lorsque l'erreur moyenne* R *surpasse l'approximation* M *des erreurs* $r_i$, *les données sont absurdes.*

*En d'autres termes, il est absurde d'assigner aux erreurs* $r_i$ *une approximation* M *inférieure à l'erreur moyenne* R.

En effet, dans ce cas l'hyperbole indicatrice se présente comme



l'indique la figure ci-contre, et il est évidemment absurde qu'une même inconnue $x$ soit inférieure aux ordonnées de la branche supérieure et supérieure aux ordonnées de la branche inférieure.

**12. Théorème fondamental IV.**

*Dans tout système d'équations de condition, une au moins des erreurs* $r_i$ *surpasse l'erreur moyenne en valeur absolue.*

En effet, si aucune erreur $r_i$ ne surpassait R en valeur absolue, il y aurait une approximation $M < R$.

Or, nous venons de voir que la relation $M < R$ est absurde.

Par conséquent, une au moins des erreurs $r_i$ supasse R en valeur absolue.

**13. Remarques finales.**

1° Pour fixer l'approximation M des erreurs $r_i$ on doit étudier attentivement toutes les causes de ces erreurs.

Cette question étant tranchée, il convient de calculer R.

Si l'on constate que R surpasse la valeur attribuée à M, on doit reconnaître que l'étude des causes d'erreurs a été mal faite, et recommencer l'examen.

2° On se figure généralement qu'un système d'équations de condition linéaires étant donné, les solutions normales sont d'autant meilleures que l'erreur moyenne est plus voisine de zéro, à tel point qu'on ne renseigne quasi jamais un résultat dit normal sans renseigner aussi l'erreur moyenne de ce résultat.

Les théorèmes fondamentaux ci-dessus montrent combien peu cette manière de voir est fondée.

En effet, le cas le plus avantageux est le cas prévu au théorème I. L'erreur moyenne R, égale à l'approximation M des erreurs $r_i$, n'est pas nulle et cependant, les solutions normales sont les valeurs exactes des inconnues.

Dans le cas du théorème II, lorsque $R < M$, les solutions normales ont pour approximation

$$Q \cdot M \cdot \sqrt{1 - \frac{R^2}{M^2}}.$$

Ces solutions sont donc d'autant plus approximatives que R est plus voisin, non de zéro, mais de M.

# CHAPITRE IV

## MÉTHODE DES MOINDRES CARRÉS SUCCESSIVE

**14. Problème de Cauchy.** — On rencontre fréquemment, dans les sciences d'observation, des séries d'équations de condition

$$
\begin{aligned}
&m_{11} + a_{11}x + b_{11}y + c_{11}z + d_{11}u \ldots = r_{11},\\
&m_{12} + a_{12}x + b_{12}y + c_{12}z + d_{12}u \ldots = r_{12},\\
&\ldots\ldots\ldots

Cette méthode est simple mais ne résout qu'imparfaitement la question. Nous avons vu au Chapitre VIII consacré *à notre méthode la plus approximative successive*, comment on doit résoudre rationnellement ce problème, lorsqu'on ne recule pas devant la longueur des calculs. Nous supposons ici qu'on ait des raisons particulières pour employer la méthode des moindres carrés, malgré ses imperfections.

**15. Théorème préliminaire.** — *Lorsqu'on remplace, dans une série d'équations de condition*

$$a_s x + b_s y + c_s z = m_s + r_s,$$

*ou*

$$r_s = a_s x + b_s y + c_s z - m_s,$$

*une inconnue quelconque, par exemple* x, *par sa valeur déduite d'une des équations suivantes, qui fournissent les solutions X, Y et Z des moindres carrés :*

$$(1)\qquad \begin{cases} \frac{1}{2}\cdot\frac{d[r^2]}{dx} = [a(ax+by+cz-m)] = 0, \\ \frac{1}{2}\cdot\frac{d[r^2]}{dy} = [b(ax+by+cz-m)] = 0, \\ \frac{1}{2}\cdot\frac{d[r^2]}{dz} = [c(ax+by+cz-m)] = 0, \end{cases}$$

*par exemple par sa valeur déduite de la troisième équation ; en d'autres termes, lorsqu'on remplace, dans la série d'équations de condition,* x *par sa valeur*

$$(2)\qquad x = \frac{[cm]}{[ca]} - y\frac{[cb]}{[ca]} - z\frac{[cc]}{[ca]},$$

*et qu'on applique ensuite les moindres carrés à la nouvelle série,*

$$(3)\quad \left\{ b_s - a_s\frac{[cb]}{[ca]} \right\} y + \left\{ c_s - a_s\frac{[cc]}{[ca]} \right\} z - \left\{ m_s - a_s\frac{[cm]}{[ca]} \right\} = r'_s,$$

*ainsi obtenue, les nouvelles solutions Y', Z' que l'on trouve ainsi pour* y *et* z, *et la nouvelle valeur*

$$X' = \frac{[cm]}{[ca]} - Y'\frac{[cb]}{[ca]} - Z'\frac{[cc]}{[ca]},$$

*déduite ensuite de la formule* (2), *sont identiques aux solutions primitives X, Y, Z des moindres carrés.*

En effet, le premier membre de l'équation générale (3) peut être mis sous la forme

$$\left\{ r_s - a_s \frac{[cr]}{[ca]} \right\}.$$

Le procédé des moindres carrés, appliqué à ces équations, consiste à annuler les dérivées, par rapport à $y$ et à $z$, de la somme

$$\left[ \left\{ r_s - a_s \frac{[cr]}{[ca]} \right\}^2 \right] = [r'r']$$

des carrés de ces premiers membres.

Or, on a :

$$\left[ \left\{ r_s - a_s \frac{[cr]}{[ca]} \right\}^2 \right] = [r^2] - 2\frac{[cr]}{[ca]}[ar] + \frac{[cr]^2}{[ca]^2}[aa].$$

On a, de plus :

$$\frac{d[r^2]}{dy} = 2[br],$$
$$\frac{d[cr]}{dy} = [bc],$$
$$\frac{d[ar]}{dy} = [ab],$$
$$\frac{d[r^2]}{dz} = 2[cr],$$
$$\frac{d[cr]}{dz} = [cc],$$
$$\frac{d[ar]}{dz} = [ac]$$

Si l'on tient compte de ces relations dans le calcul des équations finales en $y$ et $z$, c'est-à-dire en dérivant l'expression

$$\left\{ [r^2] - 2\frac{[cr]}{[ca]}[ar] + \frac{[cr]^2}{[ca]^2}[aa] \right\} = [r'r']$$

par rapport à $y$ et à $z$, ces équations prennent la forme

$$(4) \qquad \begin{aligned} [br] + \mathrm{M}[ar] + \mathrm{N}[cr] &= 0, \\ [cr] + \mathrm{P}[ar] + \mathrm{Q}[br] &= 0, \end{aligned}$$

M, N, P et Q étant des quantités indépendantes des inconnues.

Comme la relation (2) n'est autre que la dernière équation (1), c'est-à-dire $[cr] = 0$, l'ensemble formé par cette relation et les équations finales (4) équivaut au système (1) :

$$[ar] = 0,$$
$$[br] = 0,$$
$$[cr] = 0 ;$$

et l'élimination de $x$, de la manière indiquée dans l'énoncé du théorème, n'a pas modifié les solutions finales.

**16. Méthode des moindres carrés successive.**

Pour appliquer les moindres carrés au problème de Cauchy, on peut, dans un premier essai, annuler toutes les inconnues sauf $x$, calculer cette inconnue par les moindres carrés, et les résidus correspondants. Si ces résidus sont contenus dans l'intervalle donné $(-M, +M)$, le premier essai a réussi. Dans le cas contraire, on passe à l'essai suivant, dans lequel on annule toutes les inconnues sauf $x$ et $y$, et ainsi de suite.

Cette marche est très longue, parce que les calculs constituant un essai quelconque ne font pas partie intégrante des calculs constituant l'essai suivant, et que, dès lors, les calculs des essais infructueux sont presque totalement perdus.

On peut remédier à cet inconvénient, grâce au théorème préliminaire démontré au numéro précédent, en suivant une autre voie, conduisant nécessairement aux mêmes résultats, et à laquelle nous donnons, pour cette raison, le nom de *méthode des moindres carrés successive*.

Cette méthode se trouve résumée dans le tableau ci-après, qui montre manifestement que les calculs afférents à un essai quelconque font partie de l'essai suivant.

La première ligne, $0 = e_{1s}$, représente l'équation générale de rang $s$, de la série d'équations données, mise sous la forme

$$0 = m_s + a_s x + b_s y + c_s z \ldots$$

Les résidus sont supprimés, et l'indice $s$ doit prendre successivement les valeurs $1, 2, 3, \ldots n$.

Dans les applications numériques, cette ligne doit donc être remplacée par les $n$ équations données.

On commence, dans ces applications, par effectuer les opérations de la colonne intitulée *Calculs pour la première inconnue*, puis, successivement, celles des colonnes suivantes, s'il y a lieu.

La deuxième ligne, $0 = E_1$, représente la première des équations finales déduites des équations données.

On détermine cette première équation finale en opérant comme dans les moindres carrés.

On résout l'équation finale par rapport à $x$, et on trouve le résultat représenté par la troisième ligne du tableau.

On remplace, dans la première ligne, l'inconnue $x$ par sa valeur ainsi trouvée, et on obtient la quatrième ligne du tableau.

On effectue les calculs indiqués dans la deuxième colonne, et l'on obtient ainsi les résidus $r_{1s} = m_{1s} - a_{1s}\frac{M_{1s}}{A_{1s}}$.

Si ces résidus sont contenus dans l'intervalle donné $(-M, +M)$, on arrête les opérations.

Dans le cas contraire, on effectue les calculs indiqués dans la colonne intitulée *Calculs supplémentaires pour la deuxième inconnue.*

*(Voir tableau page 21).*

La ligne $0 = e_{2s}$ est la reproduction de la précédente au moyen d'autres notations.

On opère pour cette ligne comme pour $0 = e_{1s}$, et ainsi de suite.

Il est évident que quelques exercices sont nécessaires pour se amiliariser avec le mécanisme de la méthode.

| Notations | Calculs pour la première inconnue | Calculs supplémentaires pour | | |
|---|---|---|---|---|
| | | la 2e inconnue | la 3e inconnue | la 4e inconnue |
| $0 = e_{1s}$ | $0 = m_s + a_{1s}x$ | $+ b_{1s}y$ | $+ c_{1s}z$ | $+ d_{1s}u$ |
| $0 = E_1$ | $0 = M_1 + A_1x$ | $+ B_1y$ | $+ C_1z$ | $+ D_1u$ |
| | $x = -\frac{M_1}{A_1}$ | $-\frac{B_1}{A_1}y$ | $-\frac{C_1}{A_1}z$ | $-\frac{D_1}{A_1}u$ |
| $0 = r_{1s}$ | $0 = m_{1s} - a_{1s}\frac{M_1}{A_1}$ | $+\left(b_{1s} - a_{1s}\frac{B_1}{A_1}\right)y$ | $+\left(c_{1s} - a_{1s}\frac{C_1}{A_1}\right)z$ | $+\left(d_{1s} - a_{1s}\frac{D_1}{A_1}\right)u$ |
| $0 = e_{2s}$ | . . . . . | $0 = m_{2s} + a_{2s}y$ | $+ b_{2s}z$ | $+ c_{2s}u$ |
| $0 = E_2$ | . . . . . | $0 = M_2 + A_2y$ | $+ B_2z$ | $+ C_2u$ |
| | . . . . . | $y = -\frac{M_2}{A_2}$ | $-\frac{B_2}{A_2}z$ | $-\frac{C_2}{A_2}z$ |
| $0 = r_{2s}$ | . . . . . | $0 = m_{2s} - a_{2s}\frac{M_2}{A_2}$ | $+\left(b_{2s} - a_{2s}\frac{B_2}{A_2}\right)z$ | $+\left(c_{2s} - a_{2s}\frac{C_2}{A^2}\right)u$ |
| $0 = e_{3s}$ | . . . . . | . . . . . | $0 = m_{3s} + a_{3s}z$ | $+ b_{3s}u$ |
| $0 = E_3$ | . . . . . | . . . . . | $0 = M_3 + A_3z$ | $+ B_3u$ |
| | . . . . . | . . . . . | $z = -\frac{M_3}{A_3}$ | $-\frac{B_3}{A_3}u$ |
| $0 = r_{3s}$ | . . . . . | . . . . . | $0 = m_{3s} - a_{3s}\frac{M_3}{A_3}$ | $+\left(b_{3s} - a_{3s}\frac{B_3}{A_3}\right)u$ |
| $0 = e_{4s}$ | . . . . . | . . . . . | . . . . . | $0 = m_{4s} + a_{4s}u$ |
| $0 = E_4$ | . . . . . | . . . . . | . . . . . | $0 = M_4 + A_4u$ |
| | . . . . . | . . . . . | . . . . . | $u = -\frac{M_4}{A_4}$ |
| $0 = r_{4s}$ | . . . . . | . . . . . | . . . . . | $0 = m_{4s} - a_{4s}\frac{M_4}{A_4}$ |

**17. Identité des résultats de la méthode successive et de la méthode directe.** — Il résulte du théorème préliminaire que les solutions des moindres carrés des équations $0 = e_{1s}$ sont identiques à celles des équations $0 = e_s$, combinées avec la troisième ligne qui a servi à éliminer $x$.

En répétant ce raisonnement, de proche en proche, on voit que les solutions finales auxquelles conduit la méthode successive, arrêtée à un nombre quelconque d'inconnues, sont identiques aux solutions finales qu'on aurait obtenues, si l'on avait appliqué d'emblée la méthode directe aux équations $0 = e_{2s}$, limitées au même nombre d'inconnues.

**18. Exemple numérique.** — Considérons le système :

$$\begin{aligned} 1 \,.\, x + 0 \,.\, y + 1 \,.\, z + 1 \,.\, u &= \quad 0 + r_1, \\ 0 \,.\, x + 1 \,.\, y - 2 \,.\, z + 1 \,.\, u &= \quad 0 + r_2, \\ 1 \,.\, x + 1 \,.\, y + 2 \,.\, z - 1 \,.\, u &= -\ 9 + r_3, \\ 1 \,.\, x - 1 \,,\, y + 3 \,.\, z - 1 : u &= \quad 12 + r_4, \end{aligned}$$

et prenons $M = 5{,}5$.

Le tableau ci-contre résout le problème par la méthode des moindres carrés successive.

| Calculs pour la première inconnue | Calculs supplémentaires pour la 2e inconnue | Calculs supplémentaires pour la 3e inconnue | Résultats |
|---|---|---|---|
| $0 = 0 + 1 \cdot x$ | $+ 0 \ y$ | $+ 1 \cdot z$ | |
| $0 = 0 + 0 \cdot x$ | $+ 1 \cdot y$ | $- 2 \cdot z$ | |
| $0 = 9 + 1 \cdot x$ | $+ 1 \cdot y$ | $+ 2 \cdot z$ | |
| $0 = -12 + 1 \cdot x$ | $- 1 \ y$ | $+ 3 \cdot z$ | |
| $0 = 3 - 3 \cdot x$ | $+ 0 \cdot y$ | $- 6 \cdot z$ | |
| $x = 1$ | $+ 0 \cdot y$ | $- 2 \cdot z$ | $x = 7$ |
| $0 = 0 + 1$ | $+ 0 \cdot y$ | $+ (1 - 1 \cdot 2)z$ | |
| $0 = 1$ | $+ (+ 1 - 0)y$ | $+ (2 - 0 \cdot 2)z$ | |
| $0 = 10$ | $+ (+ 1 - 0)y$ | $+ (2 - 1 \cdot 2)z$ | |
| $0 = -11$ | $+ (- 1 - 0)y$ | $+ (3 - 1 \cdot 2)z$ | |
| | $0 = 1 + 0 \cdot y$ | $- 1 \cdot z$ | |
| | $0 = 0 + 1 \cdot y$ | $- 2 \cdot z$ | |
| | $0 = 10 + 1 \cdot y$ | $+ 0 \cdot z$ | |
| | $0 = -11 - 1 \cdot y$ | $+ 1 \cdot z$ | |
| | $0 = 21 + 3 \cdot y$ | $- 3 \cdot z$ | $y = -10$ |
| | $y = -7$ | $+ z$ | |
| | $0 = 1$ | $+ (- 1 + 0)z$ | |
| | $0 = -7$ | $+ (- 2 + 1)z$ | |
| | $0 = 3$ | $+ (0 + 1)z$ | |
| | $0 = 4$ | $+ (1 - 1)z$ | |
| | | $0 = 1 - 1 \cdot z$ | |
| | | $0 = -7 - 1 \cdot z$ | |
| | | $0 = 3 + 1 \cdot z$ | |
| | | $0 = -4 + 0 \cdot z$ | |
| | | $0 = 9 + 3z$ | |
| | | $z = -3$ | $z = -3$ |
| | | $0 = 4$ | |
| | | $0 = -4$ | |
| | | $0 = 0$ | |
| | | $0 = -4$ | |

$x = 0$

N° 25.

# *La triangulation topographique*

*par M. M. Alliaume* (1)

—

## INTRODUCTION

Cette étude sur la triangulation topographique est divisée en cinq chapitres. Le premier expose la théorie du théodolite sous une forme probablement nouvelle. La deuxième traite de la triangulation topographique proprement dite. Les deux chapitres suivants sont consacrés à ces généralisations de la triangulation qui s'appellent le problème des trois points, ou de Pothenot, et le problème des deux points, ou de Hansen. Le dernier chapitre discute la méthode du point approché, ou méthode de Hatt, procédé de meilleure approximation lorsque le nombre des points visés est supérieur à trois.

I. — La méthode suivant laquelle est construite la *théorie du théodolite* semble bien applicable non seulement à tous les instruments visuels, mais à tous les appareils de mesure. La manière dont l'appareil est construit et utilisé s'écarte en un certain nombre de points de la conception théorique de son inventeur. Chacune de ces différences entre l'appareil, tel qu'il est réalisé et utilisé, et l'appareil théorique est exprimée par une quantité choisie de façon que, dans la pratique, elle ne doive prendre que des valeurs petites vis-à-vis de l'unité. Le résultat d'une opération consiste dans des nombres dont chacun est une fonction des lectures effectuées sur l'appareil

(1) Annales des Travaux publics de Belgique, t. XXVI (1925), p. 839.

et de ces paramètres dont les valeurs sont petites. Cette fonction est développable en série procédant suivant les puissances croissantes de ces paramètres, et, par définition de la quantité petite, dont le carré est négligeable, cette série peut se limiter à ses termes du premier degré. Dès lors, chacune des formules à utiliser pour passer des lectures instrumentales aux résultats demandés, et dont l'établissement constitue la théorie de l'instrument, se compose des termes suivants : du terme auquel elle se réduirait dans le cas d'un instrument parfaitement construit, parfaitement réglé et parfaitement installé, et, en principe, d'autant de termes correctifs qu'il existe de paramètres mesurant les divergences entre l'appareil théorique et sa réalisation matérielle. Ces termes correctifs sont indépendants l'un de l'autre, et chacun s'obtient dans l'hypothèse d'un instrument parfait sauf la seule erreur de construction, de réglage ou d'installation caractérisée par le paramètre correspondant au terme cherché.

En ce qui concerne le théodolite, les erreurs de construction et de réglage qu'il y a lieu de considérer sont la collimation, l'erreur du zéro du cercle vertical, l'inclinaison de l'axe de rotation de la lunette et l'excentricité de celle-ci. Les erreurs d'installation consistent en ce que les axes instrumentaux qui devaient être la réalisation matérielle d'un système d'axes horizontaux, n'ont pas pu être mis parfaitement en coïncidence avec ces axes théoriques. Ces dernières erreurs s'étudient par une transformation de coordonnées, passage de l'un à l'autre de deux systèmes voisins par hypothèse. Les formules proposées pour cette transformation peuvent recevoir des applications dans d'autres parties des mathématiques appliquées.

Les fonctions finalement obtenues sont assez compliquées. Il existe, heureusement, une série d'artifices qui permettent de n'y conserver, parmi les termes correctifs, que le terme de collimation et le terme d'erreur du zéro du cercle vertical. Enfin, ces deux dernières erreurs peuvent se mesurer et s'annuler.

II. — Les problèmes topographiques dits de *triangulation* et de *recoupement* sont ordinairement résolus d'une manière peu systématique. Ici, la résolution trigonométrique des triangles a été complètement abandonnée, et la dénomination même de

triangulation n'a été conservée que par égard pour la coutume.

Il y a deux points dont les coordonnées sont connues, et un point dont les coordonnées sont inconnues ; ce dernier point se trouve à l'intersection de deux lignes de visée. Chaque ligne de visée se représente par deux équations linéaires, et les coordonnées demandées se tirent d'un système de quatre équations linéaires à trois inconnues. Ces équations, en nombre surabondant, ne seraient compatibles que dans des observations parfaites, et si était exacte l'hypothèse simplificatrice du géoïde plan qui définit la Topographie vis-à-vis de la Géodésie. Aussi le système est-il incompatible, et l'approximation à laquelle il peut se résoudre est une mesure de la précision des opérations.

Les points du terrain sont rapportés à des axes de coordonnées dont le texte suppose la définition connue. Cette définition va être rappelée ici une fois pour toutes.

Les axes des $x$, des $y$ et des $z$ constituent un système rectangulaire dont l'origine est quelconque, dont l'axe des $z$ est vertical, dirigé positivement vers le zénith, et dont les axes des $x$ et des $y$ sont orientés d'une manière quelconque dans le plan horizontal de l'origine. Le sens de rotation du système est défini par celui des lectures croissantes sur le cercle horizontal du théodolite utilisé : l'observateur qui appartiendrait à la partie positive de l'axe des $z$ verrait une droite dirigée du plan des $xy$ passer de l'axe des $x$ à l'axe des $y$, moyennant une rotation d'un angle droit, en tournant dans le même sens que le théodolite autour de son pivot pour des lectures croissantes sur le cercle horizontal. Les coordonnées polaires d'une droite dirigée portent, par rapport à ces axes, les noms d'azimut et d'angle de pente (ou de hauteur). La distance zénithale est le complément de l'angle de pente.

Les axes topographiques sont entièrement déterminés par les coordonnées d'un point quelconque du terrain, l'azimut d'une direction quelconque (par exemple issue de ce point) et le sens de la rotation positive du théodolite autour de son pivot. En effet, cet azimut et ce sens de rotation suffisent à définir un système d'axes de coordonnées topographiques ayant pour origine le point proposé du terrain, parallèles aux axes définitifs et par rapport auxquels l'origine définitive a des

coordonnées égales et de signes contraires aux coordonnées connues du point proposé du terrain.

Les formules par lesquelles se résolvent les problèmes de triangulation sont mises en œuvre dans un tableau de calcul qui est celui qu'emploient les étudiants du cours de Topographie des Écoles spéciales de l'Université de Louvain.

Mais les circonstances physiques des observations viennent troubler l'harmonieuse application de la Géométrie analytique. En ce qui concerne le calcul des cotes des points inconnus, des erreurs affectent les résultats dès que le point visé est quelque peu éloigné, ne fût-ce que de quelques centaines de mètres, du point de station. L'une de ces erreurs est due à la courbure de la Terre, et son importance montre combien l'hypothèse topographique du géoïde plan est moins satisfaisante dans la détermination des altitudes que dans celle des coordonnées planimétriques. La seconde de ces erreurs est due à ce que les visées se font dans un milieu non homogène, l'air atmosphérique, et qu'il n'y a par conséquent point de droites de visées à proprement parler : ce n'est qu'en faisant abstraction de la réfraction que nous avons pu écrire, pour les lignes de visée, des équations linéaires.

Des corrections sont nécessaires. Les formules correctives sont mises en tables et traduites en nomogrammes. Tables et nomogrammes ne font pas, ici, double emploi; car les circonstances dans lesquelles il y a lieu d'utiliser celles-là ne sont pas celles dans lesquelles il est avantageux de recourir à ceux-ci. Deux nomogrammes ont été construits, l'un pour le cas dans lequel le point inconnu est le point visé, l'autre pour le cas dans lequel le point inconnu est le point de station. Ce sont de ces monogrammes à points alignés, en dehors desquels la Nomographie perd les plus précieux de ses avantages. C'est la belle méthode que M. d'Ocagne a créée, à partir des abaques à faisceaux rectilignes, par le passage des coordonnées ponctuelles aux coordonnées tangentielles. Cependant, ici, la construction des épures est exposée indépendamment de toute théorie nomographique générale : c'est une application immédiate de la Géométrie analytique à deux dimensions, et cette manière élémentaire de comprendre la Nomographie est valable dans un grand nombre de cas.

III. — *Le problème des trois points* est fameux en Topographie : on connaît les coordonnées de trois points; on cherche

les coordonnées d'un quatrième. On peut soutenir que la solution exposée ici est la plus naturelle : écrire les équations qui expriment les observations, et les résoudre. Mais on va se heurter à de grandes difficultés de calcul : l'équation principale est transcendante ; rendue algébrique elle sera du troisième degré. Par nature du problème, deux des racines de cette équation algébriques sont imaginaires. Ne va-t-il pas néanmoins falloir la résoudre, en tant qu'équation du troisième degré ? Non, car on verra que les racines imaginaires sont $+ i$ et $- i$, sans même que l'équation doive être rendue algébrique, de sorte que son premier membre (le second étant nul) est divisible par l'unité augmentée du carré de l'inconnue.

Cette démonstration se fait au moyen de l'identité

$$\text{tg}\,[\text{arc tg}\,(\pm i) + \alpha] = \infty \pm i$$

vraie quel que soit $\alpha$, et on aura plaisir à voir de quelle utilité peuvent être les imaginaires aux ingénieurs qui veulent bien se rappeler leur existence.

C'est particulièrement dans le rattachement du lever aux axes d'un lever antérieur que le problème des trois points trouve son application. On examine principalement le cas dans lequel les axes du lever antérieur sont définis géographiquement, par un méridien et par un parallèle, et on entre dans quelques détails au sujet d'un lever rattaché à de pareils axes et effectué dans les environs de Louvain.

IV. — Proposé à la suite du problème des trois points, le *problème des deux points* est, dès son énoncé, déconcertant. Dans le problème précédent, on connaissait les coordonnées de trois points, et aucune donnée ne s'est montrée surabondante. Maintenant, on prétend se tirer d'affaire, dans le calcul des coordonnées d'un point nouveau, en ne disposant que des coordonnées de deux points. La solution n'est pas moins, à première vue, paradoxale ; nous craignions déjà que les données fussent insuffisantes, et voilà que la solution proposée commence par augmenter le nombre des inconnues : on demandait les coordonnées d'un point ; on va prétendre déterminer, à la fois, les coordonnées de deux points. Ingénieuse idée, cependant, et qui assure le succès : deux points de station visés l'un de l'autre, et les deux points connus visés des deux stations ; en tout cinq lignes de visée, cinq

équations, tandis que les inconnues sont au nombre de cinq.

Écrire ces cinq équations et les résoudre, voilà bien la manière la plus naturelle de répondre à la question. Mais les difficultés sont de même nature que dans le problème des trois points, et en plus grave : l'équation principale, qui est transcendante, sera, rendue algébrique, du cinquième degré. Par le même artifice utilisé dans le problème des trois points, et que rend possible l'emploi des imaginaires, on prévoit que, des cinq racines de cette équation, sans même qu'il faille la rendre algébrique, quatre sont imaginaires, à savoir deux fois $+ i$ et deux fois $- i$; ainsi le premier membre (le second étant nul) est divisible par le carré de la somme de l'unité et du carré de l'inconnue : l'équation restante est du premier degré.

A qui est due cette idée d'un second point de station? On n'est pas certain de la réponse. Cependant ce problème s'appelle le problème de Hansen, et Hansen n'y est pour rien, du moins pour rien d'original : il en a parlé, mais on avait fait mieux avant lui. Il n'a pas paru qu'il y eût lieu de s'arrêter ici à ces considérations historiques.

Ne peut-on pas résoudre le problème des deux points au moyen d'une seule station? Oui, à la condition de connaître les cotes des points visés. Car le problème est, sous cette forme, à quatre inconnues, et les visées permettent d'écrire quatre équations. C'est ce qu'on a développé ici, sans manquer d'insister sur les difficultés d'application de cette méthode.

Revenons au problème des trois points. Deux points, dit le chapitre actuel, peuvent suffire. Quelle est le meilleure façon de les utiliser tous les trois? Ceci n'a pas été abordé, et des questions connexes se poseront : il a fallu se limiter.

V. — Que l'on dispose, cette fois, de plus de trois points. Quel est leur meilleur usage? Le mathématicien le sait a priori, et voici quel est son programme : au moyen de trois d'entre eux, ou de deux d'entre eux, calculer une solution approchée; par celle-ci, rendre les équations linéaires; et appliquer au système d'équations l'une des méthodes de la Théorie des erreurs. Y a-t-il quelque autre chose à apprendre? Tout au plus des artifices, mais ils peuvent être intéressants.

Un de ces artifices constitue la *méthode du point approché*, ou méthode de Hatt. Après choix d'un point de première

approximation, on fait correspondre une circonférence à chaque couple de points visés, on mène telle tangente à cette circonférence, et on déplace, de telle quantité, cette droite parallèlement à elle-même : elle est devenue, pour le point cherché, un lieu de deuxième approximation.

Quel est l'intérêt de cette méthode? Quels sont ses avantages pratiques? Il semble qu'on ne s'en soit guère préoccupé. Or voici son intérêt, à quoi correspond son avantage : l'équation de la droite de deuxième approximation est précisément l'une des équations linéaires auxquelles, tantôt, le mathématicien se proposait d'appliquer la Théorie des erreurs.

C'est donc très bien. Mais, dès lors, toute cette pénible interprétation géométrique n'a plus de raison d'être, et c'est le retour à la méthode purement algébrique, la meilleure a priori.

Cette aventure n'est pas, de son espèce, la première. — Les marins se donnent beaucoup de peine pour mettre sur pied, dans la détermination du point, la méthode dite de Marcq Saint-Hilaire : il y a des cercles de hauteur qui, sur la carte de Mercator, deviennent des lignes terriblement transcendantes ; il y a des droites de hauteur tracées, cette fois, sur la carte de Mercator, et qui, sur la sphère, deviennent des loxodromies. Or, on a montré que les équations finales par lesquelles s'expriment toutes ces laborieuses constructions ne sont autres que celles que fournissent, suivant des principes invariables, les développements en série caractéristiques du passage des mathématiques pures aux mathématiques appliquées. Cette étude s'est faite dans ces *Annales des Travaux publics de Belgique* (octobre 1909) dans un mémoire intitulé « Les problèmes de navigation résolus par la Géométrie analytique radiale ».

Mais cette coïncidence n'est-elle pas nécessaire? N'est-elle pas dans la nature des choses? Certes non : en ce qui concerne la détermination du point, il y avait, avant Marcq Saint-Hilaire, la méthode de Lalande et la méthode de Borda. Elles fournissent des équations toutes différentes ; aussi ne sont-elles pas les plus avantageuses, et deviennent-elles illusoires dans certains cas.

Il reste à chercher les conditions analytiques de cette coïncidence. Il a paru que ceci serait sans intérêt pour les praticiens, et c'est à l'intention des praticiens que ce mémoire a été écrit.

Louvain, le 9 juin 1925.

# CHAPITRE PREMIER.

## Théorie nouvelle du théodolite.

### I. — Principes et approximation.

Théoriquement, le théodolite est la réalisation matérielle d'un système de coordonnées horizontales. Si cet instrument était parfaitement construit, réglé, installé et utilisé, les lectures L et $l$, respectivement sur le cercle horizontal et sur le cercle vertical, seraient l'azimut et la hauteur de la ligne de visée définie par le point d'intersection des fils réticulaires principaux. Il n'en est pas tout-à-fait ainsi, par suite des défauts inhérents à la construction de l'instrument, de l'imperfection de son réglage et des erreurs inévitables d'installation et d'observation.

En vue des applications topographiques du théodolite, on peut admettre :

1° que la ligne de visée et l'axe de rotation de la lunette sont deux droites concourantes ;

2° qu'il en est de même de l'axe de rotation de la lunette et du pivot de l'instrument.

Admettre ces hypothèses simplificatrices équivaut à considérer les plus courtes distances de ces droites, deux à deux, comme n'intervenant que dans des termes négligeables à l'approximation à laquelle le théodolite va être étudié.

Les défauts non négligeables de construction et de réglage sont :

1° la collimation $c$, inclinaison de la ligne de visée sur le plan perpendiculaire à l'axe de rotation de la lunette ;

2° l'erreur $w$ du zéro du cercle de hauteur, angle de pente ou distance zénithale du rayon initial de la graduation de ce cercle suivant que la chiffraison a été gravée en vue de la mesure des angles de pente ou en vue de la mesure des distances zénithales ;

3° l'inclinaison $i$, définie de manière à être voisine de zéro, de l'axe de rotation de la lunette sur le plan perpendiculaire au pivot de l'instrument ;

4° l'excentricité E de la ligne de visée, moindre distance entre celle-ci et le pivot de l'instrument.

Les erreurs d'installation du théodolite par rapport aux axes horizontaux théoriques sont :

1° l'erreur W d'orientation du cercle des azimuts, azimut du rayon initial de la graduation de ce cercle sur lequel la rotation positive du théodolite est, par hypothèse, droitière ou gauchère suivant que les axes de coordonnées constituent un système droitier ou un système gaucher;

2° l'obliquité I, définie de manière à être voisine de zéro, de l'axe du pivot sur la verticale ;

et l'influence de cette dernière erreur dépend de la valeur B de l'azimut du plan vertical auquel appartient le pivot de l'instrument.

Nous supposerons d'abord le cercle vertical chiffré en vue de la mesure des angles de pente : le rayon initial de sa graduation est théoriquement horizontal.

L'azimut A et l'angle de pente $p$ de la ligne de visée sont des expressions de L, $l$, $c$, $w$, $i$, E, W, I, B et de la distance $\rho$ du point visé; cette distance est mesurée à partir du centre de l'instrument, point commun au pivot et à l'axe de rotation de la lunette. Ces expressions doivent être homogènes, et chacun de leurs termes sera de dimensions nulles, comme le sont A et $p$ : en particulier, les longueurs E et $\rho$ n'y entreront que par leur rapport.

Le rapport $E/\rho$ est une quantité petite, du même ordre que les mesures des petits angles $c$, $w$, $i$, I, W avec le radian pour unité. A ce rapport et à ces mesures d'angles, attribuons le premier ordre de petitesse, et définissons l'approximation à laquelle va être faite la théorie du théodolite en convenant de considérer comme négligeables les quantités petites du deuxième ordre, carrés et produits deux à deux des quantités petites du premier ordre.

Dès lors, chacune des expressions

$$A = F\left(L, l, c, w, i, \frac{E}{\rho}, W, I\right),$$

$$p = f\left(L, l\ c, w, i, \frac{E}{\rho}, W, I\right)$$

pourra se développer en série suivant les puissances croissantes des quantités petites $c$, $w$, $i$, $E/\rho$, W, I, et il sera légitime de limiter ces développements aux termes du premier degré.

Autrement dit, le développement en série de chacune de ces expressions se composera d'un terme non petit, nécessairement L dans l'expression de l'azimut et $l$ dans l'expression de l'angle de pente, et de termes petits dont chacun renfermera l'une des quantités $c$, $w$, $i$, E/ρ, W, I : les expressions cherchées de l'azimut et de l'angle de pente seront des fonctions linéaires de ces six quantités petites; les erreurs que ces quantités mesurent n'ont, sur A et $p$, que des influences indépendantes l'une de l'autre ; et nous pourrons chercher séparément chacun des termes de ces fonctions linéaires en considérant comme nulles toutes les erreurs sauf, successivement, une seule.

## II. — Erreurs de construction et de réglage.

1. *Collimation.* — L'origine O des coordonnées $xyz$ est le centre de l'instrument, point commun au pivot et à l'axe de rotation de la lunette, censé appartenir aussi, dans l'hypothèse actuelle de la seule erreur de collimation, à la ligne de visée V (fig. 1). En vertu de cette même hypothèse, le pivot est vertical; il appartient à l'axe des $z$, et celui-ci est dirigé positivement vers le zénith L'axe de rotation $a$ de la lunette appartient à une droite dirigée positivement vers la droite ou vers la gauche de l'opérateur suivant que la rotation du théodolite autour du pivot est positive de gauche à droite ou de droite à gauche, c'est-à-dire, en même temps, suivant que le système $xyz$ des axes de coordonnées constitue un système droitier ou un système gaucher ; les coordonnées polaires de l'axe de rotation $a$ sont (L + 1 *droit*, 0).

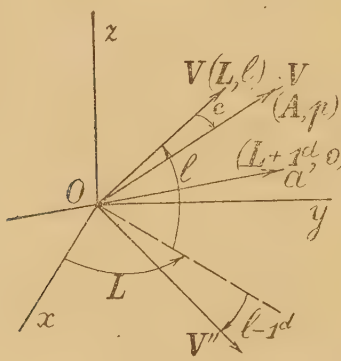


Fig. 1.

C'est à cause de la collimation que la ligne de visée V, dont les coordonnées polaires sont (A, $p$), n'appartient pas au plan passant par le centre et perpendiculaire à $a$. Soit V′ la projection de la ligne de visée sur ce plan : cette projection est dirigée de façon que l'angle (V′V) soit un angle voisin de

zéro. Cet angle est la collimation $c$, mesurée de V′ vers V, positivement dans le sens pour lequel l'angle (V′$a$) est égal à un droit, c'est-à-dire vers la droite ou vers la gauche de l'opérateur suivant que la rotation positive par rapport au cercle horizontal est droitière ou gauchère. La droite V′a pour coordonnées les lectures L et $l$ sur le cercle horizontal et sur le cercle vertical Enfin, la perpendiculaire V″ au plan VV′ a, dans l'un de ses sens, des coordonnées polaires (L ; $l$ — 1 *droit*).

Nous cherchons deux relations entre (A, $p$, L, $l$, $c$), relations d'où nous puissions tirer A et $p$ en fonction de (L, $l$, $c$). Nous les obtiendrons en écrivant que la ligne de visée fait tels angles connus avec deux directions dont les coordonnées polaires s'expriment au moyen des lectures L et $l$ :

1° l'angle (VV″) est égal à un droit, ou

$$-\sin p \cos l + \cos p \sin l \cos (A - L) = 0 ;$$

2° l'angle ($a$V) est égal à (1 *dr.* — $c$), ou

$$\cos p \sin (A - L) = \sin c .$$

Eu égard à la petitesse de $c$ et à l'approximation convenue, ce système de deux équations en A et $p$ fournit :

$$\left\{ \begin{array}{l} A = L + \dfrac{c}{\cos l}, \\ p = l . \end{array} \right. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

2. *Erreur du zéro du cercle vertical.* — Cette erreur, qui n'affecte que l'angle de pente, est l'angle de pente $w$ de la ligne de visée lorsque la lecture $l$ au cercle vertical est nulle; donc, si cette erreur était la seule, on aurait

$$\left\{ \begin{array}{l} A = L , \\ p = l + w . \end{array} \right. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

3. *Inclinaison de l'axe de rotation de la lunette.* — L'axe de rotation $a$ de la lunette n'appartient pas au plan horizontal des $xy$ (fig. 2), et cette erreur est la seule qu'il faille actuellement considérer. Les axes de coordonnées sont ceux qui ont été définis ci-dessus. Soit $a'$ la projection de l'axe $a$ sur le plan des $xy$, dirigée positivement vers la droite ou vers la gauche de l'observateur suivant que l'instrument est droitier ou

gaucher. L'axe de rotation $a$ lui même est dirigé de façon que son sens positif fasse un angle voisin de zéro (et non de deux droits) avec le sens positif de $a'$. Cet angle $(a'a)$, ou inclinaison $i$, est mesuré de $a'$ vers $a$, dans un sens tel que l'angle $(a'z)$ vaille un droit. Le plan perpendiculaire à $a$ renferme la ligne de visée V, dont les coordonnées polaires sont $(A,p)$, et coupe le plan des $xy$ suivant une droite V′ dont l'un des sens a les coordonnées polaires (L, 0). C'est à partir de ce sens que l'angle (V′V) est égal à la lecture $l$ sur le cercle vertical.

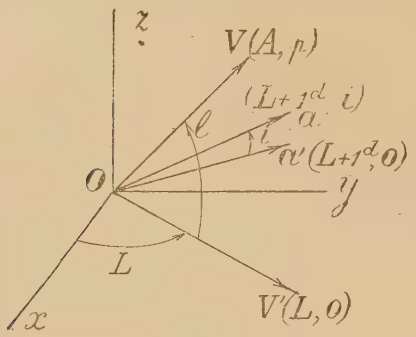


Fig. 2.

Pour obtenir les deux relations nécessaires en (A, $p$, L, $l$, $i$), exprimons :

1° que l'angle (V$a$) est égal à un droit,

$$\sin p \sin i + \cos p \cos i \sin (A - L) = 0;$$

2° que l'angle (V′V) est égal à $l$,

$$\cos p \cos (A - L) = \cos l.$$

Ces deux équations donnent, eu égard à la petitesse de $i$ et à l'approximation convenue,

$$\left.\begin{aligned} A &= L - i \operatorname{tg} l, \\ p &= l. \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

4. *Excentricité.*— Nous gardons les mêmes axes de coordonnées, et l'axe de rotation $a$ de la lunette, située par hypothèse dans le plan des $xy$, a le même sens positif que dans l'étude de la collimation ; mais (fig. 3) le point d'intersection O' de la ligne de visée V et de l'axe $a$ a, le long de celui-ci, une abscisse E susceptible, par conséquent, de signe : elle est positive lorsque la lunette

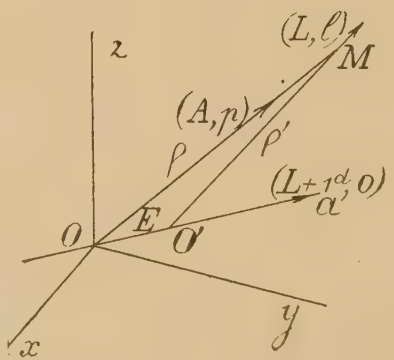


Fig. 3.

est, par rapport au centre de l'instrument, à la droite ou à la gauche de l'opérateur suivant que le théodolite est droitier ou gaucher.

Soient M le point visé et $\rho$ la distance OM. La direction OM a des coordonnées polaires (A, $p$).

Soit encore $\rho'$ la distance O′M. La ligne de visée O′M a des coordonnées polaires (L, $l$).

Les cosinus directeurs des trois droites O′M, OM et $a$ sont :

| | | | |
|---|---|---|---|
| OM .... | cos A cos $p$, | sin A cos $p$, | sin $p$ |
| O′M .... | cos L cos $l$, | sin L cos $l$, | sin $l$ |
| $a$ .... | — sin L, | cos L, | 0 |

Exprimons que, sur chacun des trois axes de coordonnées, la projection du contour O′OM est égale à la projection de sa résultante OM :

axe des $x$ .... $\rho \cos A \cos p = -E \sin l + \rho' \cos L \cos l$

axe des $y$ .... $\rho \sin A \cos p = E \cos l + \rho' \sin L \cos l$

axe des $z$ .... $\rho \sin p = \rho' \sin l.$

Il s'agit de résoudre, à l'approximation actuelle, ce système par rapport aux inconnues ($\rho$, A, $p$).

Si l'excentricité était nulle, on aurait

$$\frac{\rho}{\rho'} = 1, \qquad A = L, \qquad p = l.$$

Nous pouvons donc écrire

$$\frac{\rho}{\rho'} = 1 + k, \qquad A = L + m, \qquad p = l + n,$$

remplaçant ainsi les inconnues initiales par trois inconnues nouvelles ($k$, $m$, $n$) s'annulant en même temps que E et petites comme le rapport $E/\rho$, c'est-à-dire comme le rapport $E/\rho'$.

Les trois équations deviennent

$$(1 + k) \cos (L + m) \cos (l + n) = -\frac{E}{\rho'} \sin L + \cos L \cos l,$$

$$(1 + k) \sin (L + m) \cos (l + n) = \frac{E}{\rho'} \cos L + \sin L \cos l,$$

$$(1 + k) \sin (l + n) = \sin l.$$

La petitesse des inconnues actuelles ($k$, $m$, $n$) permet, à l'approximation convenue, la transformation de ce système transcendant dans le système linéaire

$$k \cos L \cos l - m \sin L \cos l - n \cos L \sin l = -\frac{E}{\rho'} \sin L,$$

$$k \sin L \cos l + m \cos L \cos l - n \sin L \sin l = \frac{E}{\rho'} \cos L,$$

$$k \sin l + n \cos l = 0$$

qui a pour solution

$$k = 0, \qquad m = \frac{E}{\rho'} \text{séc } l, \qquad n = 0,$$

de sorte que, eu égard à l'excentricité seule,

$$\left.\begin{aligned} A &= L + \frac{E}{\rho} \text{séc } l, \\ p &= l. \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Ainsi, en fonction des seules erreurs de construction et de réglage, et d'après les formules (1), (2), (3), (4),

$$A = L + \left(c - i \sin l + \frac{E}{\rho}\right) \text{séc } l,$$

$$p = l + w.$$

### III. — Erreurs d'installation.

1. Les axes théoriques de coordonnées sont OXYZ, tandis que les axes instrumentaux $Oxyz$, par rapport auxquels les coordonnées polaires (A, $p$) ont été mesurées jusqu'ici, ont, avec la même origine, des orientations légèrement différentes caractérisées par les quantités petites W, I et l'azimut B. Les formules de passage de l'un à l'autre de deux pareils systèmes sont de la forme

$$X = a_1 x + a_2 y + a_3 z,$$

$$Y = b_1 x + b_2 y + b_3 z,$$

$$Z = c_1 x + c_2 y + c_3 z,$$

où les constantes ($a_1$, $b_1$, ... $c_3$) sont trois à trois (moyennant les mêmes indices) les cosinus directeurs des axes $Oxyz$ par rapport au système OXYZ. De ces neuf constantes trois seulement sont indépendantes, liées qu'elles sont par six relations, dont trois expriment que ce sont les cosinus directeurs de trois directions, et dont les trois autres expriment la perpendicularité de ces directions deux à deux.

Mais ici les deux systèmes d'axes sont voisins : les angles ($Xx$), ($Yy$), ($Zz$) sont petits, et les carrés et produits deux à deux de leurs mesures en radians sont négligeables. Les

cosinus $(a_1, b_2, c_3)$ de ces angles sont assimilables à l'unité, et les identités

$$a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = 1,$$
$$a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 = 1,$$
$$a_3^2 + b_3^2 + c_3^2 = 1$$

deviennent

$$b_1^2 + c_1^2 = 0,$$
$$a_2^2 + c_2^2 = 0,$$
$$a_3^2 + b_3^2 = 0$$

et expriment que les quantités $a_2$, $a_3$, $b_1$, $b_3$, $c_1$, $c_2$ ont leurs carrés et par conséquent leurs produits deux à deux négligeables : ce sont des quantités petites du premier ordre.

Les équations de perpendicularité

$$a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0,$$
$$a_2a_3 + b_2b_3 + c_2c_3 = 0,$$
$$a_3a_1 + b_3b_1 + c_3c_1 = 0$$

se réduisent donc à

$$a_2 + b_1 = 0,$$
$$b_3 + c_2 = 0,$$
$$a_3 + c_1 = 0$$

et expriment que ces quantités sont, à l'approximation actuelle, symétriques deux à deux.

Posons

$$b_3 = -c_2 = \alpha,$$
$$c_1 = -a_3 = \beta,$$
$$a_2 = -b_1 = \gamma.$$

$(\alpha, \beta, \gamma)$ sont des paramètres indépendants au moyen desquels les formules de passage de l'un à l'autre des deux systèmes voisins s'écrivent

$$X = x + \gamma y - \beta z,$$
$$Y = -\gamma x + y + \alpha z,$$
$$Z = \beta x - \alpha y + z \ (1).$$

(1) Les paramètres $(\alpha, \beta, \gamma)$ ont été définis de manière à faciliter la mémoire des formules de transformation. Les coordonnées (X, Y, Z) s'obtiennent en ajoutant aux coordonnées $(x, y, z)$ de même rang les trois déterminants tirés du tableau rectangulaire

$$\left\| \begin{matrix} x & y & z \\ \alpha & \beta & \gamma \end{matrix} \right\|$$

par suppression, respectivement, de la première, de la deuxième et de la troisième colonne, avec, sur les signes de ces déterminants, les conventions habituelles.

2. Dans l'installation imparfaite du théodolite, le pivot est incliné sur la verticale d'un petit angle I, dans un azimut B. Avec, pour origine, le centre de l'instrument, l'axe théorique des Z appartient à la verticale et est dirigé positivement vers le zénith ; les axes des X et des Y ont des orientations déterminées dans le plan horizontal, et constituent un système droitier ou gaucher, comme les axes instrumentaux des $xy$, suivant que les lectures au cercle des azimuts vont en croissant pour une rotation du théodolite autour du pivot de gauche à droite ou de droite à gauche.

Si $(g, h)$ sont, provisoirement, les coordonnées polaires de l'axe des $x$ dans le système OXYZ,

$$\alpha = b_3 = \cos(Y\zeta) = \sin I \sin B,$$
$$\beta = -a_3 = -\cos(X\zeta) = -\sin I \cos B,$$
$$\gamma = -b_1 = -\cos(Yx) = -\sin g \cos h.$$

Il reste à chercher $g$ et $h$.

Exprimons que l'axe des $x$ est perpendiculaire à l'axe des $\zeta$ :

$$\sin h \cos I + \cos h \sin I \cos(B - g) = 0;$$

et que la projection horizontale $(g, 0)$ de l'axe des $x$ fait, avec l'axe des X, le petit angle W, erreur d'orientation du cercle des azimuts, azimut du rayon initial $Ox$ de ce cercle :

$$g = W ;$$

d'où, par la première relation en $(g, h)$, et à l'approximation actuelle, à laquelle le carré de I est négligeable :

$$h = -I \cos(B - W).$$

Il en résulte les valeurs

$$\alpha = I \sin B,$$
$$\beta = -I \cos B,$$
$$\gamma = -W,$$

et les formules de transformation

$$X = x - Wy + I \cos B \cdot \zeta,$$
$$Y = Wx + y + I \sin B \cdot \zeta$$
$$Z = -I \cos B \cdot x - I \sin B \cdot y + \zeta.$$

En coordonnées polaires

$$\cos A \cos p = \cos L \cos l - W \sin L \cos l + I \cos B \sin l,$$
$$\sin A \cos p = W \cos L \cos l + \sin L \cos l + I \sin B \sin l,$$
$$\sin p = -I \cos B \cos L \cos l - I \sin B \sin L \cos l + \sin l.$$

Il faut résoudre ce système par rapport à (A, $p$). Si les axes de coordonnées étaient confondus, on aurait

$$A = L, \quad p = l,$$

et si nous posons

$$A = L + u, \quad p = l + v,$$

$u$ et $v$ sont des quantités petites comme I et W. Après substitution, développements et simplifications, il reste un système (nécessairement compatible à l'approximation convenue) de trois équations linéaires en ($u$, $v$) :

$$-u \sin L \cos l - v \cos L \sin l = -W \sin L \cos l + I \cos B \sin l,$$

$$u \cos L \cos l - v \sin L \sin l = W \cos L \cos l + I \sin B \sin l,$$

$$v \cos l = -I \cos B \cos L \cos l - I \sin B \sin L \cos l.$$

Ces équations fournissent les racines

$$u = W - I \operatorname{tg} l \sin (L - B),$$

$$v = -I \cos (L - B),$$

de sorte que

$$A = L + W - I \operatorname{tg} l \sin (L - B),$$

$$p = l - I \cos (L - B).$$

Ainsi, les formules définitives de réduction des observations au théodolite, eu égard à la fois aux erreurs de construction, de réglage et d'installation, sont

$$A = L + W + \left[ c + \frac{E}{\rho} - i \sin l - I \sin l \sin (L - B) \right] \sec l,$$

$$p = l + w - I \cos (L - B).$$

3. Dans les applications topographiques du théodolite, l'usage attentif d'un bon niveau solidaire du pivot, autour duquel, pour une configuration déterminée du dispositif de réglage, il ne peut que tourner, permet d'installer l'instrument de façon que l'angle I soit, exprimé en radians, une quantité petite du deuxième ordre, c'est-à-dire, ici, négligeable (1).

(1) Une étude du niveau à bulle, rédigée dans le même esprit, aurait pu trouver place dans ce mémoire. On y a renoncé pour ne pas allonger davantage celui-ci. Voir : E. Goedseels, *Théorie nouvelle du niveau à bulle longitudinal*, Annales de la Société scientifique de Bruxelles, t. 36 (1912), vol. mémoires, p. 133 ; M. Alliaume, *Contribution à la théorie du niveau à bulle*, même recueil, t. 41 (1922), p. 167 de la première partie.

De la même manière, la manœuvre, suivant le procédé connu, du dispositif de réglage de l'axe de rotation de la lunette permet de négliger le terme en $i$.

Il en résulte que, dans la pratique courante, pour un théodolite dont, éventuellement, la lunette est excentrique,

$$A = L + W + \left(c + \frac{E}{\rho}\right) \text{séc } l,$$

$$p = l + w.$$

Supposons un changement d'orientation quelconque, non nécessairement petit, des axes instrumentaux horizontaux des $xy$ par rapport aux axes horizontaux théoriques XY, moyennant le même axe des $z$, ou des Z, et la même origine pour les deux systèmes.

Ce changement d'orientation n'affecte pas les angles de pente, et les azimuts des diverses lignes de visée sont modifiés, quels que soient les angles de pente, de la même quantité, à savoir la mesure du décalage des deux couples d'axes horizontaux. Ainsi les formules ci-dessus restent valables lorsque l'erreur W du cercle horizontal est, plutôt que petite, quelconque.

Enfin, on connaît la manière de se débarrasser, si la lunette est excentrique, du terme d'excentricité $\frac{E}{\rho}$ séc $l$ : il suffit de viser, de la même station, deux fois le même point, lunette à droite et lunette à gauche. Après ces deux observations et les lectures $L_1$ et $L_2$ (corrigée de 180°) sur le cercle horizontal,

$$A = L_1 + W + \left(c + \frac{E}{\rho}\right) \text{séc } l,$$

$$A = L_2 + W + \left(c - \frac{E}{\rho}\right) \text{séc } l,$$

d'où par addition,

$$A = \frac{L_1 + L_2}{2} + W + \frac{c}{\cos l}.$$

Plus simplement, lorsque les circonstances s'y prêtent, en particulier lorsque les visées se font sur le voyant d'une mire, il suffira de viser un point marqué sur le voyant, en dehors du centre, à une distance de celui-ci égale à l'excentricité E, à droite ou à gauche suivant que la lunette est excentrique à droite ou à gauche ; on aura recommandé au porte-mire d'orienter la mire de façon que le voyant soit sensiblement perpendiculaire au plan vertical de la ligne de visée.

En résumé, un bon théodolite, utilisé avec soin, peut se traiter par les formules simplifiées

$$A = L + W + \frac{c}{\cos l},$$

$$p = l + w.$$

4. — Jusqu'ici, le cercle vertical a été supposé chiffré de façon que les lectures $l$ y soient, théoriquement, les angles de pente $p$ des lignes de visée. Ce cercle est souvent chiffré de façon que les lectures $l$ y soient, théoriquement, les distances zénithales $d$ des lignes de visée. Dans ce cas, l'erreur $w$ du zéro du cercle vertical est la distance zénithale, voisine de zéro, du rayon initial de ce cercle lorsque la lecture est $l = 0$. Dans les formules obtenues par la théorie précédente, $l$ doit être remplacé par son complément et $p$ par $(1\ dr. - d)$ ; les formules complètes sont

$$A = L + W + \left[c + \frac{E}{\rho} - i\cos l - I\cos l \sin (L - B)\right] \text{cosec } l,$$

$$d = l + w + I\cos (L - B),$$

et, en vue de la pratique, les formules réduites s'écrivent

$$A = L + W + \frac{c}{\sin l},$$

$$d = l + w.$$

5. — C'est dans l'esprit de ces considérations théoriques et pratiques qu'ont été rédigées les *instructions* ci-dessous pour les exercices pratiques de Topographie aux Écoles spéciales de l'Université de Louvain.

### Installation et réglage d'un théodolite.

*Instruments.* — Un théodolite avec ses accessoires, — un trépied à translation ; — un jalon ; sur chaque cercle du théodolite, un vernier a été choisi et marqué comme vernier principal.

*Réglage du niveau à pivot.* — ...

*Détermination des erreurs instrumentales : collimation* c *et erreur* w *du zéro du cercle vertical.* — Se placer en station sur un terrain peu incliné et faire des visées sur un point choisi de façon que la ligne de visée soit sensiblement horizontale : ce sera le milieu d'une croix de Saint-André dessinée sur une

carte de visite fixée sur un jalon planté en un point convenable, à une distance quelconque. Notations : L lectures sur le cercle horizontal, $l$ sur le cercle vertical, aux verniers principaux et éventuellement corrigées de l'excentricité de la graduation des cercles au moyen des lectures aux autres verniers.

1° Cas d'un cercle vertical chiffré de manière qu'on y lise des *angles de pente* p :

*a*) position normale du théodolite, avec le bouton moleté du pignon de mise au point du réticule à droite de l'opérateur; disposer l'instrument de manière que la lecture $L_1$ soit dans le premier quadrant; le vernier principal du cercle vertical a dû être choisi de manière que la lecture $l_1$ (éventuellement diminuée de 4 droits) soit voisine de zéro ; noter $L_1$ et $l_1$;

*b*) retourner de deux droits la partie mobile du théodolite autour de la verticale, et la lunette bout pour bout; lectures $L_2$ et $l_2$;

*c*) par la théorie du théodolite, avec $l$ voisin de 0, puis de 2 droits,

$$A_1 = L_1 + c\,, \qquad p_1 = l_1 + w,$$
$$A_2 = L_2 - c\,, \qquad p_2 = l_2 + w,$$

tandis que

$$A_2 = A_1 + 2 \text{ droits},$$
$$p_2 = 2 \text{ droits} - p_1,$$

d'où calcul de $c$ et $w$ :

$$c = \frac{L_2 - L_1 - 2 \text{ droits}}{2}\,,$$

$$w = \frac{2 \text{ droits} - (l_1 + l_2)}{2}\,.$$

2° Cas d'un cercle vertical chiffré de manière qu'on y lise des *distances zénithales* d.

*a*) position normale du théodolite, avec le bouton moleté du pignon de mise au point du réticule à droite de l'opérateur; disposer l'instrument de manière que la lecture $L_1$ soit dans le premier quadrant; le vernier principal du cercle vertical a dû être choisi de manière que la lecture $l_1$ soit voisine d'un droit; noter $L_1$ et $l_1$;

*b*) retourner de deux droits la partie mobile du théodolite autour de la verticale, et la lunette bout pour bout; lectures $L_2$ et $l_2$,

*c*) par la théorie du théodolite, avec $l$ voisin d'un droit, puis de 3 droits,

$$A_1 = L_1 + c\,, \qquad d_1 = l_1 + w,$$
$$A_2 = L_2 - c\,, \qquad d_2 = l_2 + w.$$

tandis que

$$A_2 = A_1 + 2 \text{ droits},$$
$$p_2 = 4 \text{ droits} - p_1,$$

d'où calcul de $c$ et $w$ :

$$c = \frac{L_2 - L_1 - 2 \text{ droits}}{2},$$
$$w = \frac{4 \text{ droits} - (l_1 + l_2)}{2}.$$

*Annulation des erreurs instrumentales* par réglage du réticule (pour la collimation) et du cercle vertical (pour l'erreur de son zéro).

Laisser à l'instrument sa position de deuxième visée ; calculer l'azimut $A_2$ de la ligne de visée,

$$A_2 = L_2 - c$$

et soit l'angle de pente $p_2$ (premier cas ci-dessus), soit la distance zénithale $d_2$ (second cas) de cette ligne de visée,

$$p_2 = l_2 + w \qquad \text{ou} \qquad d_2 = l_2 + w.$$

1° *Réglage du réticule.* — Manœuvrer la vis de rappel du cercle horizontal jusqu'à ce que la lecture au vernier principal soit $A_2$ ; déplacer latéralement le réticule jusqu'à ce que le fil vertical passe de nouveau par l'image du point visé.

2° *Réglage du cercle vertical.* — **Sans toucher à la lunette**, agir sur le dispositif de réglage du cercle vertical de façon que la lecture au vernier principal de ce cercle devienne $p_2$ (premier cas) ou $d_2$ (second cas).

*Vérification.* — Faire une nouvelle détermination de $c$ et de $w$ ; il faut trouver *zéro* ; sinon recommencer.

## CHAPITRE II.

### LA TRIANGULATION TOPOGRAPHIQUE.

1. *Équations de la ligne de visée.* — Par rapport aux axes du levé topographique, une ligne de visée est complètement déterminée par les coordonnées $(x_0, y_0, z_0)$ du point de station, par la hauteur I du centre du théodolite au-dessus du sol, et

par les lectures L et $l$ sur le cercle horizontal et sur le cercle vertical, respectivement.

En effet, ces lectures permettent le calcul de l'azimut et de l'angle de pente de la ligne de visée théorique : pour un instrument non excentrique, bien installé et bien réglé, il y aura identité entre chaque lecture et la coordonnée polaire correspondante ; nous représenterons désormais (généralement) la lecture et la coordonnée polaire correspondante par la même lettre.

La ligne de visée est dès lors une droite dont on connaît un point $(x_0, y_0, z_0 + \mathrm{I})$ et la direction. Ses équations sont

$$\frac{x - x_0}{\cos \mathrm{L} \cos l} = \frac{y - y_0}{\sin \mathrm{L} \cos l} = \frac{z - (z_0 + \mathrm{I})}{\sin l}.$$

Tout point de la ligne de visée a des coordonnées qui satisfont à ces équations, et il en est ainsi de chacun des points dont les images, pour toutes les positions du tube porte-réticule, coïncident avec le point d'intersection des fils réticulaires principaux. Il en est ainsi, en particulier, du point visé sur la mire : si $(x, y, z)$ sont les coordonnées du pied de la mire, et si M, hauteur de mire, est la lecture sur la mire au fil horizontal principal,

$$\frac{x - x_0}{\cos \mathrm{L} \cos l} = \frac{y - y_0}{\sin \mathrm{L} \cos l} = \frac{(z + \mathrm{M}) - (z_0 + \mathrm{I})}{\sin l}.$$

Dans d'autres circonstances, la ligne de visée est déterminée par les coordonnées $(x_0, y_0, z_0)$ du pied de la mire, par la lecture M sur la mire au fil horizontal principal, et par les lectures L et $l$ au cercle horizontal et au cercle vertical.

L'instrument étant bien installé et réglé, les équations de la ligne de visée sont

$$\frac{x - x_0}{\cos \mathrm{L} \cos l} = \frac{y - y_0}{\sin \mathrm{L} \cos l} = \frac{z - (z_0 + \mathrm{M})}{\sin l}.$$

Les coordonnées de tout point de la ligne de visée satisfont à ces équations ; il en est ainsi, en particulier, du centre de l'instrument : si $(x, y, z)$ sont les coordonnées du point de station, et si I est la hauteur du centre de l'instrument au-dessus du sol,

$$\frac{x - x_0}{\cos \mathrm{L} \cos l} = \frac{y - y_0}{\sin \mathrm{L} \cos l} = \frac{(z + \mathrm{I}) - (z_0 + \mathrm{M})}{\sin l}.$$

Ces principes vont être appliqués dans la résolution des

problèmes qui constituent les méthodes dites de *triangulation* et de *recoupement*.

2. *Problème 1.* — On connaît les coordonnées $(X_1, Y_1, Z_1)$ et $(X_2, Y_2, Z_2)$ de deux points $P_1$ et $P_2$ accessibles et visibles l'un de l'autre. On demande les coordonnées $(X_3, Y_3, Z_3)$ d'un point P visible des deux premiers.

Un théodolite est installé en $P_1$, la hauteur $I_1$ de son centre est mesurée, et son cercle horizontal est orienté de manière qu'à une visée sur la mire placée en $P_2$ corresponde la lecture d'un angle ayant pour tangente

$$\frac{Y_1 - Y_2}{X_1 - X_2};$$

une visée est faite sur la mire placée en P et fournit les lectures $(L_1, l_1)$ sur les cercles et $M_1$ sur la mire, au fil horizontal principal. Dans les circonstances des problèmes actuels, la mire sera généralement trop éloignée pour que les lectures puissent s'y faire directement et pour que la mire parlante puisse être utilisée ; c'est le centre du réticule qui sera amené en coïncidence avec l'image du point milieu du voyant de la mire, et, par lecture sur la mire, il faudra le plus souvent comprendre hauteur du centre du voyant.

Le théodolite est installé en $P_2$, orienté par une visée sur $P_1$, et les mêmes opérations permettent de noter les lectures $I_2$, $L_2$, $l_2$, $M_2$; $M_1$ et $M_2$ seront généralement un même nombre.

Les équations des deux lignes de visée sont

$$\frac{x - X_1}{\cos L_1 \cos l_1} = \frac{y - Y_1}{\sin L_1 \cos l_1} = \frac{z - (Z_1 + I_1)}{\sin l_1},$$

$$\frac{x - X_2}{\cos L_2 \cos l_2} = \frac{y - Y_2}{\sin L_2 \cos l_2} = \frac{z - (Z_2 + I_2)}{\sin l_2}.$$

Les équations de la première ligne de visée et celles de la deuxième sont satisfaites respectivement par les coordonnées $(X_3, Y_3, Z_3 + M_1)$ et $(X_3, Y_3, Z_3 + M_2)$, coordonnées du point visé dans la première et dans la deuxième opération :

$$\frac{X_3 - X_1}{\cos L_1 \cos l_1} = \frac{Y_3 - Y_1}{\sin L_1 \cos l_1} = \frac{(Z_3 + M_1) - (Z_1 + I_1)}{\sin l_1},$$

$$\frac{X_3 - X_2}{\cos L_2 \cos l_2} = \frac{Y_3 - Y_2}{\sin L_2 \cos l_2} = \frac{(Z_3 + M_2) - (Z_2 + I_2)}{\sin l_2}.$$

Ceci constitue un système de quatre équations aux trois inconnues $(X_3, Y_3, Z_3)$. Les imperfections de l'instrument et les erreurs inévitables d'observation empêcheront leur compati-

bilité. Cependant il n'y aura généralement pas lieu d'appliquer la Théorie des erreurs (1). Dans la pratique, on résoudra d'abord le système en $(X_3, Y_3)$,

$$Y_3 - Y_1 = \operatorname{tg} L_1 (X_3 - X_1),$$
$$Y_3 - Y_2 = \operatorname{tg} L_2 (X_3 - X_2),$$

(1) Penserait-on, au contraire, et dans des circonstances très particulières (comme dans des travaux d'école), qu'il y a lieu de soumettre ce système à la Théorie des erreurs, et aurait-on des raisons d'adopter la méthode des moindres carrés, qu'on appliquerait les formules suivantes.

Soient, pour simplifier les écritures,

$$\lambda_1 = \operatorname{tg} l_1, \qquad \lambda_2 = \operatorname{tg} l_2,$$
$$Z'_1 = Z_1 + I_1 - M_1, \qquad Z'_2 = Z_2 + I_2 - M_2,$$
$$C = \cos L_1 \operatorname{tg} l_1 + \cos L_2 \operatorname{tg} l_2,$$
$$S = \sin L_1 \operatorname{tg} l_1 + \sin L_2 \operatorname{tg} l_2,$$
$$C' = Z'_1 \cos L_1 \operatorname{tg} l_1 + Z'_2 \cos L_2 \operatorname{tg} l_2,$$
$$S' = Z'_1 \sin L_1 \operatorname{tg} l_1 + Z'_2 \sin L_2 \operatorname{tg} l_2.$$

Les solutions finales $(X_3, Y_3, Z_3)$ de la méthode des moindres carrés sont les racines du système

$$(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) X_3 + 0 \cdot Y_3 - CZ_3 = X_1\lambda_1^2 + X_2\lambda_2^2 - C',$$
$$0 \cdot X_3 + (\lambda_1^2 + \lambda_2^2) Y - SZ_3 = Y_1\lambda_1^2 + Y_2\lambda_2^2 - S',$$
$$- CX_3 - SZ_3 + 2Z_3 = - C - S + Z'_1 + Z'_2.$$

Posons encore

$$\Delta = - (\lambda_1^2 + \lambda_2^2) (C^2 + S^2 + 2\lambda_1^2 + 2\lambda_2^2),$$

et après avoir formé le tableau

$$\begin{vmatrix}
\lambda_1 & 0 & -\cos L_1 & X_1\lambda_1 - Z'_1 \cos L_1 \\
\lambda_2 & 0 & -\cos L_2 & X_2\lambda_2 \quad Z'_2 \cos L \\
0 & \lambda_1 & -\sin L_1 & Y_1\lambda_1 - Z'_1 \sin L_1 \\
0 & \lambda_2 & -\sin L_2 & Y_2\lambda_2 - Z'_2 \sin L_2 \\
\lambda_1^2 + \lambda_2^2 & 0 & -C & X_1\lambda_1^2 + X_2\lambda_2^2 - C \\
0 & \lambda_1^2 + \lambda_2^2 & -S & Y_1\lambda_1^2 - Y_2\lambda_2^2 - S' \\
-C & -S & 2 & Z'_1 - Z'_2 - C - S
\end{vmatrix}$$

appelons $H_1$, $H_2$, $H_3$, $H_4$, les déterminants formés au moyen de chacune des quatre premières lignes, respectivement, et des trois dernières. Adopter la solution de la méthode des moindres carrés équivaut à admettre une *approximation* au moins égale à la valeur absolue de celui des quatre rapports

$$\frac{H_1}{\Delta}, \quad \frac{H_2}{\Delta}, \quad \frac{H_3}{\Delta}, \quad \frac{H_4}{\Delta}$$

dont la valeur absolue est la plus grande. Sur cette dernière notion et sur la signification de sa grandeur, voir notre article *L'approximation des résidus dans la méthode des moindres carrés*, Annales de la Société scientifique de Bruxelles, t. 43 (1924), p. 158 de la première partie.

formé des équations des plans verticaux des lignes de visée. On obtiendra

$$X_3 = \frac{(X_1 \operatorname{tg} L_1 - Y_1) - (X_2 \operatorname{tg} L_2 - Y_2)}{\operatorname{tg} L_1 - \operatorname{tg} L_2},$$

$$Y_3 = \frac{(Y_1 \operatorname{cotg} L_1 - X_1) - (Y_2 \operatorname{cotg} L_2 - X_2)}{\operatorname{cotg} L_1 - \operatorname{cotg} L_2}. \quad (1)$$

On calculera enfin $Z_3$ de deux manières : au moyen des résultats de la première observation,

$$Z_3 = Z_1 + \left(\frac{X_3 - X_1}{\cos L_1} \text{ ou } \frac{Y_3 - Y_1}{\sin L_1}\right) \operatorname{tg} l_1 - (M_1 - I_1),$$

et au moyen des résultats de la deuxième,

$$Z_3 = Z_2 + \left(\frac{X_3 - X_2}{\cos L_2} \text{ ou } \frac{Y_3 - Y_2}{\sin L_2}\right) \operatorname{tg} l_2 - (M_2 - I_2).$$

La différence des deux valeurs obtenues est une mesure de l'approximation des observations. On jugera dans chaque cas particulier, eu égard à toutes les circonstances, si cette approximation est acceptable. Pratiquement on tolérera une différence de quelques centimètres, et on adoptera la moyenne arithmétique des deux cotes. Une différence disproportionnée à la précision des opérations sera l'indice d'une faute de calcul.

3. *Problème II* — On connaît les coordonnées $(X_1, Y_1, Z_1)$ et $(X_2, Y_2, Z_2)$ des deux points $P_1$ et $P_2$, ainsi que l'azimut A d'une direction quelconque P*p* issue d'un point P accessible et d'où les deux premiers sont visibles. On demande les coordonnées $(X_3, Y_3, Z_3)$ du point P.

(1) Pour faciliter le calcul de ces expressions de $X_3$ et de $Y_3$, on jugera peut être utile d'introduire les coordonnées polaires topographiques, distance horizontale et azimut, par rapport à l'origine, $(R_1, A_1)$ et $(R_2, A_2)$, des points $P_1$ et $P_2$. Ces nombres sont définis par les égalités

$$X_1 = R_1 \cos A_1, \qquad X_2 = R_2 \cos A_2,$$
$$Y_1 = R_1 \sin A_1, \qquad Y_2 = R_2 \sin A_2,$$

et permettent d'écrire

$$X_3 = \frac{R_1 \sin (L_1 - A_1) \cos L_2 - R_2 \sin (L_2 - A_2) \cos L_1}{\sin (L_1 - L_2)}$$

$$Y_3 = \frac{R_1 \sin (L_1 - A_1) \sin L_2 - R_2 \sin (L_2 - A_2) \sin L_1}{\sin (L_1 - L_2)}.$$

Un théodolite est installé en P ; son cercle horizontal est orienté de manière à vérifier l'azimut connu A de la direction P$p$ ; la hauteur I de son centre au dessus du sol est mesurée.

A des visées sur une mire placée en $P_1$ puis en $P_2$ correspondent, par des lectures sur les cercles, les coordonnées polaires $(L_1, l_1)$ et $(L_2, l_2)$ des lignes de visée $PP_1$ et $PP_2$, ainsi que les lectures $M_1$ et $M_2$ sur la mire (ou hauteurs du voyant, de sorte que, dans ce cas, si l'on veut, $M_1 = M_2$).

Les équations des lignes de visée sont

$$\frac{x - X_1}{\cos L_1 \cos l_1} = \frac{y - Y_1}{\sin L_1 \cos l_1} = \frac{z - (Z_1 + M_1)}{\sin l_1},$$

$$\frac{x - X_2}{\cos L_2 \cos l_2} = \frac{y - Y_2}{\sin L_2 \cos l_2} = \frac{z - (Z_2 + M_2)}{\sin l_2};$$

ces équations sont satisfaites par les coordonnées $(X_3, Y_3, Z_3 + I)$ du centre de l'instrument :

$$\frac{X_3 - X_1}{\cos L_1 \cos l_1} = \frac{Y_3 - Y_1}{\sin L_1 \cos l_1} = \frac{(Z_3 + I) - (Z_1 + M_1)}{\sin l_1};$$

$$\frac{X_3 - X_2}{\cos L_2 \cos l_2} = \frac{Y_3 - Y_2}{\sin L_2 \cos l_2} = \frac{(Z_3 + I) - (Z_2 + M_2)}{\sin l_2}.$$

Ce sont quatre équations aux inconnues $(X_3, Y_3, Z_3)$, coordonnées du point P ; les erreurs instrumentales et les erreurs d'observation empêchent leur compatibilité. Sauf interversion de $M_1$ et de $I_1$, de $M_2$ et de $I_2$, et le cas particulier $I_1 = I_2 = I$, ce système est celui qui a été résolu au problème précédent. Les coordonnées planimétriques $(X_3, Y_3)$ se calculeront par les mêmes formules (1). Quant à la cote $Z_3$ elle se calculera par l'une et l'autre des relations

$$Z_3 = Z_1 + \left(\frac{X_3 - X_1}{\cos L_1} \text{ ou } \frac{Y_3 - Y_1}{\sin L_1}\right) \operatorname{tg} l_1 + (M_1 - I),$$

$$Z_3 = Z_2 + \left(\frac{X_3 - X_2}{\cos L_2} \text{ ou } \frac{Y_3 - Y_2}{\sin L_2}\right) \operatorname{tg} l_2 + (M_2 - I),$$

dont les résultats devront sensiblement concorder.

4. *Problème III.* — On connait les coordonnées $(X_1, Y_1, Z_1)$

(1) Les formules de résolution par la méthode des moindres carrés restent valables pourvu que l'on ait posé

$$Z'_1 = Z_1 + M_1 - I, \qquad Z'_2 = Z_2 + M_2 - I.$$

et $(X_2, Y_2, Z_2)$ de deux points $P_1$ et $P_2$, visibles l'un de l'autre, et dont un seul, par exemple $P_1$, est accessible au théodolite. On demande les coordonnées $(X_3, Y_3, Z_3)$ d'un point P accessible au théodolite et d'où les deux autres sont visibles.

Le théodolite est installé en $P_1$, et son cercle horizontal est orienté de manière à vérifier l'azimut de $P_1 P_2$, dont la tangente a la valeur connue $\frac{Y_1 - Y_2}{X_1 - X_2}$. Une visée sur le point P donne l'azimut de $P_1P$. L'azimut de $PP_1$ en diffère de deux droits, et le problème actuel est ramené au problème précédent.

5. Les dispositions préconisées ci-dessous sont extraites des Instructions pour les exercices pratiques de Topographie aux Écoles spéciales de l'Université de Louvain.

*Calculs.* — Les calculs relatifs aux problèmes I et II sont identiques sauf en ceci : dans le problème II

$$I_1 = I_2 = I ,$$

et les différences $M_1 - I_1$, $M_2 - I_2$ changent de signe de l'un à l'autre problème.

Le théodolite ayant été réglé, la collimation et l'erreur du zéro du cercle vertical sont nulles, et les lectures sur les cercles sont les coordonnées polaires de la ligne de visée :

$$L_1 = A_1 , \qquad l_1 = p_1 ,$$
$$L_2 = A_2 , \qquad l_2 = p_2 .$$

Les formules pour le calcul des coordonnées $(X_3, Y_3)$ sont, dans les deux problèmes,

$$X_3 = \frac{(X_1 \operatorname{tg} A_1 - Y_1) - (X_2 \operatorname{tg} A_2 - Y_2)}{\operatorname{tg} A_1 - \operatorname{tg} A_2} ,$$

$$Y_3 = \frac{(Y_1 \operatorname{cotg} A_1 - X_1) - (Y_2 \operatorname{cotg} A_2 - X_2)}{\operatorname{cotg} A_1 - \operatorname{cotg} A_2} ,$$

et pour le calcul de $Z_3$

$$Z_3 = Z_1 + \frac{X_3 - X_1}{\cos A_1} \operatorname{tg} p_1 \mp (M_1 - I_1)$$

ou bien

$$Z_3 = Z_2 + \frac{Y_3 - Y_2}{\sin A_2} \operatorname{tg} p_2 \mp (M_2 - I_2)$$

avec les signes supérieurs ou inférieurs suivant que le point inconnu est le point visé (problème I) ou le point de station (problème II). On appliquera les deux formules pour se ménager une vérification.

Point inconnu : , S, V.
Point connu n° 1 : , S, V.
Point connu n° 2 : , S, V.

TABLEAU A

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $X_1$ | ..... | 50 | 8 | $Y_1$ | ..... | 39 |
| 2 | $X_2$ | ..... | 9 | 9 | $Y_2$ | ..... | 62 |
| 3 | $X_1 - X_2$ | $\pm$ ..... | 41 | 10 | $Y_1 - Y_2$ | $\pm$ ..... | 24 |
| 4 | $A_1$ | ..... | 7 | 11 | $\alpha_1$ | ..... | 12 |
| 5 | $A_2$ | ..... | 14 | 12 | $\alpha_2$ | ..... | 13 |
| 6 | $A_1 - A_2$ | ..... | 11 | 13 | $\delta$ | ..... | 15 |
| 7 | $p_1$ | $\pm$ ..... | 57 | 14 | $p_2$ | $\pm$ ..... | 69 |

TABLEAU B

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 15 | $lX_1$ | ..... | 32 | 32 | $lY_1$ | ..... | 18 |
| 16 | $l \operatorname{tg} \alpha_1$ | ..... | 33 | 33 | $l \operatorname{cotg} \alpha_1$ | ..... | 45 |
| 17 | $l(X_1 \operatorname{tg} \alpha_1)$ | ..... | 34 | 34 | $l(Y_1 \operatorname{cotg} \alpha_1)$ | ..... | 20 |
| 18 | $lX_2$ | ..... | 35 | 35 | $l Y_2$ | ..... | 44 |
| 19 | $l \operatorname{tg} \alpha_2$ | ..... | 36 | 36 | $l \operatorname{cotg} \alpha_2$ | ..... | 29 |
| 20 | $l(X_2 \operatorname{tg} \alpha_2)$ | ..... | 37 | 37 | $l(Y_2 \operatorname{cotg} \alpha_2)$ | ..... | 21 |
| 21 | $X_1 \operatorname{tg} A_1$ | $\pm$ ..... | 38 | 38 | $Y_1 \operatorname{cotg} A_1$ | $\pm$ ..... | 22 |
| 22 | $-X_2 \operatorname{tg} A_2$ | $\pm$ ..... | 39 | 39 | $-Y_2 \operatorname{cotg} A_2$ | $\pm$ ..... | 23 |
| 23 | $\Delta(X \operatorname{tg} A)$ | ..... | 40 | 40 | $\Delta(Y \operatorname{cotg} A)$ | ..... | 25 |
| 24 | $Y_2 - Y_1$ | $\pm$ ..... | 6 | 41 | $X_2 - X_1$ | $\pm$ ..... | 10 |
| 25 | $\xi$ | $\pm$ ..... | 42 | 42 | $\eta$ | $\pm$ ..... | 26 |
| 26 | $l \lvert \xi \rvert$ | ..... | 43 | 43 | $l \lvert \eta \rvert$ | ..... | 30 |
| 27 | $l \cos \alpha_1$ | ..... | 53 | 44 | $l \sin \alpha_1$ | ..... | 27 |
| 28 | $l \cos \alpha_2$ | ..... | 19 | 45 | $l \sin \alpha_2$ | ..... | 65 |
| 29 | $cl \sin \delta$ | ..... | 46 | 46 | $cl \sin \delta$ | ..... | 54 |
| 30 | $l \lvert X_3 \rvert$ | ..... | 47 | 47 | $l \lvert Y_3 \rvert$ | ..... | 31 |
| 31 | $X_3$ | ..... | 49 | 48 | $Y_3$ | ..... | 61 |

Tableau C.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 49 | $X_3$ | ..... | 48 | 61 | $Y_3$ | ..... | 51 |
| 50 | $X_1$ | ..... | 8 | 62 | $Y_2$ | ..... | 71 |
| 51 | $X_3 - X_1$ | $\pm$ ..... | 63 | 63 | $Y_3 - Y_2$ | $\pm$ ..... | 52 |
| 52 | $l \mid X_3 - X_1 \mid$ | ..... | 64 | 64 | $l \mid Y_3 - Y_2 \mid$ | ..... | 55 |
| 53 | $cl \cos \alpha_1$ | ..... | 16 | 65 | $cl \sin \alpha_2$ | ..... | 28 |
| 54 | $l \operatorname{tg} \mid p_1 \mid$ | ..... | 66 | 66 | $l \operatorname{tg} \mid p_2 \mid$ | ..... | 17 |
| 55 | $l \mid \zeta_1 \mid$ | ..... | 67 | 67 | $l \mid \zeta_2 \mid$ | ..... | 56 |
| 56 | $\zeta_1$ | $\pm$ ..... | 68 | 68 | $\zeta_2$ | $\pm$ ..... | 58 |
| 57 | $\pm (M_1 - l_1)$ | ..... | 2 | 69 | $\pm (M_2 - l_2)$ | ..... | 3 |
| 58 | $Z - Z_1$ | ..... | 70 | 70 | $Z_3 - Z_2$ | ..... | 60 |
| 59 | $Z_1$ | ..... | 4 | 71 | $Z_2$ | ..... | 5 |
| 60 | $Z_3$ | ..... | 72 | 72 | $Z_3$ | ..... ..... | |

$X_3 =$ ..... $Y_3 =$ ..... $Z_3 =$ .....

Les calculs se feront au moyen de l'un des groupes de tableaux (A, B, C) reproduits ci-dessus. En vue de la rédaction de ces tableaux on a donné aux formules la forme suivante :

$$\begin{cases} \Delta (X \operatorname{tg} A) = X_1 \operatorname{tg} A_1 - X_2 \operatorname{tg} A_2 , \\ \Delta (Y \operatorname{cotg} A) = Y_1 \operatorname{cotg} A_1 - Y_2 \operatorname{cotg} A_2 , \end{cases}$$

$$\begin{cases} \xi = \Delta (X \operatorname{tg} A) + Y_2 - Y_1 , \\ \eta = \Delta (Y \operatorname{cotg} A) + X_2 - X_1 , \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_3 = + \dfrac{\xi \cos A_1 \cos A_2}{\sin (A_1 - A_2)} , \\ Y_3 = - \dfrac{\eta \sin A_1 \sin A_2}{\sin (A_1 - A_2)} , \end{cases}$$

$$\begin{cases} \zeta_1 = (X_3 - X_1) \dfrac{\operatorname{tg} p_1}{\cos A_1} , \\ \zeta_2 = (Y_3 - Y_2) \dfrac{\operatorname{tg} p_2}{\sin A_2} \end{cases}$$

$$Z_3 = Z_1 + \zeta_1 \mp (M_1 - I_1) = Z_2 + \zeta_2 \mp (M_2 - I_2).$$

Les lignes à remplir sont numérotées (colonnes de gauche) de 1 à 72.

Commencer à la ligne 1 ; le nombre de droite de chaque ligne indique la ligne qu'il faut remplir immédiatement après, et ainsi de suite.

$\alpha_1$ est l'angle du premier quadrant dont le sinus et le cosinus ont même valeur absolue que le sinus et le cosinus de l'angle $A_1$. De même $\alpha_2$ vis-à-vis de $A_2$, et $\delta$ vis-à-vis de $(A_1 - A_2)$.

*l* est écrit pour *log*, et *cl* pour *colog*.

En tête des tableaux, sur les lignes *Point inconnu*,..... on spécifiera les points considérés. Sur chacune de ces lignes, on biffera la lettre S ou V suivant que le point correspondant est un point visé ou un point de station. Si, à la ligne *Point inconnu*, on biffe la lettre S, c'est qu'on se trouve dans le cas du *Problème I* ; si l'on biffe la lettre V, c'est qu'on se trouve dans le cas du *Problème II*. Dans le premier cas, on adoptera les signes supérieurs aux lignes 57 et 69 ; dans le second cas, les signes inférieurs. Les signes adoptés seront entourés d'une petite circonférence.

Pour faciliter le choix des signes aux autres lignes, nous supposerons que les axes ont été définis de façon que les coordonnées $(X_1, Y_1)$, $(X_2, Y_2)$ soient positives. On verrait facilement comment les règles devraient être modifiées s'il en était autrement ; en particulier, il faudrait remplacer $lX_1$, par $l|X_1|$, etc.

Aux lignes 21 et 38, les signes sont celui de $\mathrm{tg}A_1$ ; aux lignes 22 et 39, ce sont les signes *contraires* à celui de $\mathrm{tg}A_2$.

Le signe de $X_3$ (ligne 31) résulte de ceux de $\xi$, $\cos A_1$, $\cos A_2$ et $\sin (A_1 - A_2)$; celui de $Y_3$ (ligne 48) résulte de ceux de $\eta$, $\sin A_1$, $\sin A_2$ et $\sin (A_1 - A_2)$.

Le signe de $X_3$ est *plus* ou *moins* suivant que, dans le produit $\xi \cos A_1 \cos A_2 \mathrm{cosec}\ (A_1 - A_2)$, le nombre des facteurs négatifs est pair oui mpair.

Attention ! Le signe de $Y_3$ est *plus* ou *moins* suivant que, dans le produit $\eta \sin A_1 \sin A_2 \mathrm{cosec}\ (A_1 - A_2)$, le nombre des facteurs négatifs est *impair* ou *pair*.

Les signes de $\zeta_1$ et de $\zeta_2$ (lignes 56 et 68) résultent respectivement de ceux de $(X_3 - X_1, \cos A_1, \mathrm{tg}\, p_1)$ et de $(Y_3 - Y_2, \sin A_2, \mathrm{tg}\, p_2)$, signe *plus* ou *moins* suivant que, dans le produit considéré, le nombre des facteurs négatifs est *pair* ou *impair*.

Toutes les additions indiquées sont algébriques.

Pour diminuer les chances d'erreur, il sera bon de faire un croquis à peu près à l'échelle, représentant, en projection horizontale, les axes de coordonnées (ou des parallèles aux axes convenablement choisies) et les points $P_1$, $P_2$, $P_3$.

6. *Exemple.* — A partir de deux points connus C et E

| | | | |
|---|---|---|---|
| C... | $X_1 = 493{,}43$ | $Y_1 = 99{,}71$ | $Z_1 = 63{,}23$ |
| E... | $X_2 = 920{,}23$ | $Y_2 = 176{,}24$ | $Z_2 = 69{,}19$ |

on effectue un recoupement sur un point inconnu F. C'est une application du *Problème I*,

Les *observations* ont donné

| | | |
|---|---|---|
| $A_1 = 50^\circ\ 30'$ | $P_1 = 0^\circ\ 35'$ | $M_1 - I_1 = 2{,}76$ |
| $A_2 = 92^\circ\ 37'$ | $P_2 = 0^\circ\ 4'$ | $M_2 - I_2 = 2{,}65$ |

*Croquis* :

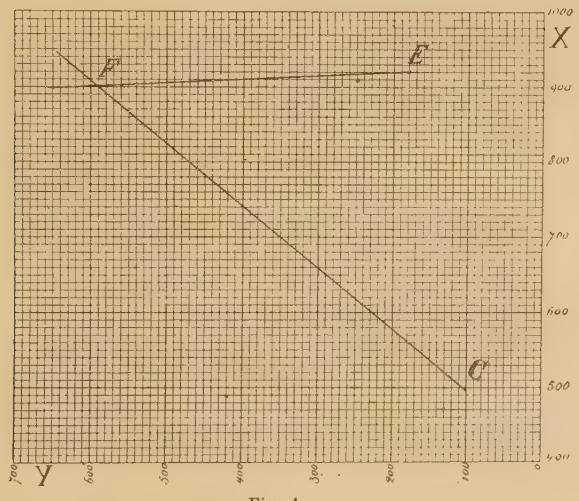



Fig. 4.

*Calcul* :

Tableau A

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $X_1$ | 493,43 | 8 | $Y_1$ | 99,71 |
| 2 | $X_2$ | 920,23 | 9 | $Y_1$ | 176,24 |
| 3 | $X_1 - X_2$ | $-426{,}80$ | 10 | $Y_1 - Y_2$ | $-76{,}53$ |
| 4 | $A_1$ | $50^\circ\ 30'$ | 11 | $\alpha_1$ | $50^\circ\ 30'$ |
| 5 | $A_2$ | $92^\circ\ 37'$ | 12 | $\alpha_2$ | $87^\circ\ 23'$ |
| 6 | $A_1 - A_2$ | $317^\circ\ 53'$ | 13 | $\delta$ | $42^\circ\ 7'$ |
| 7 | $p_1$ | $+ 0^\circ\ 35'$ | 14 | $p_2$ | $+ 0^\circ\ 4'$ |

Tableau B

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 15 | $lX_1$ | 2,6932256 + | 32 | $lY_1$ | 1,9987387 + |
| 16 | $l \operatorname{tg} \alpha_1$ | 0 0838955 + | 33 | $l \operatorname{ctg} \alpha_1$ | $\overline{1}$,9161045 + |
| 17 | $l (X_1 \operatorname{tg} \alpha_1)$ | 2,7771211 + | 34 | $l (Y_1 \operatorname{ctg} \alpha_1)$ | 1,9148432 + |
| 18 | $l X_2$ | 2,9638964 + | 35 | $lY_2$ | 2,2461045 + |
| 19 | $l \operatorname{tg} \alpha_2$ | 1,3400721 — | 36 | $l \operatorname{ctg} \alpha_2$ | $\overline{2}$,6599279 — |
| 20 | $l (X_2 \operatorname{tg} \alpha_2)$ | 4,3039785 — | 37 | $l (Y_2 \operatorname{ctg} \alpha_2)$ | 0,9060324 — |
| 21 | $X_1 \operatorname{tg} A_1$ | + 598,58 | 38 | $Y_1 \operatorname{ctg} A_1$ | + 82 19 |
| 22 | $— X_2 \operatorname{tg} A_2$ | + 20125 78 | 39 | $— Y_2 \operatorname{ctg} A_2$ | + 8.05 |
| 23 | $\Delta (X \operatorname{tg} A)$ | + 20734,36 | 40 | $\Delta (Y \operatorname{ctg} A)$ | + 90,24 |
| 24 | $Y_2 — Y_1$ | + 76,53 | 41 | $X_2 — X_1$ | + 426.80 |
| 25 | $\xi$ | + 20810,89 | 42 | $\eta$ | + 517 04 |
| 26 | $l \mid \xi \mid$ | 4,3182906 + | 43 | $l \mid \eta \mid$ | 2 7135325 + |
| 27 | $l \cos \alpha_1$ | $\overline{1}$,8035105 + | 44 | $l \sin \alpha_1$ | $\overline{1}$,8874061 + |
| 28 | $l \cos \alpha_2$ | $\overline{2}$,6594848 — | 45 | $l \sin \alpha_2$ | $\overline{1}$,9995469 + |
| 29 | $cl \sin \delta$ | 0.1735090 — | 46 | $cl \sin \delta$ | 0 1735090 — |
| 30 | $l \mid X_3 \mid$ | 2,9547849 + | 47 | $l \mid Y_3 \mid$ | 2,7739945 — |
| 31 | $X_3$ | 901,12 | 48 | $Y_3$ | 593,60 |

Tableau C

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 49 | $X_3$ | 901,12 | 61 | $Y_3$ | 593.60 |
| 50 | $X_1$ | 493,43 | 62 | $Y_2$ | 176,24 |
| 51 | $X_3 — X_1$ | 407,69 | 63 | $Y_3 — Y_2$ | 417,36 |
| 52 | $l \mid X_3 — X_1 \mid$ | 2,6103301 + | 64 | $l \mid Y_3 — Y_2 \mid$ | 2,6205108 + |
| 53 | $cl \cos \alpha_1$ | 0,1964895 + | 65 | $cl \sin \alpha_2$ | 0.0004531 + |
| 54 | $l \operatorname{tg} \mid p_1 \mid$ | 2,0078092 + | 66 | $l \operatorname{tg} \mid p_2 \mid$ | $\overline{3}$.0659863 + |
| 55 | $l \mid \xi_1 \mid$ | 0,8146288 + | 67 | $l \mid \xi_2 \mid$ | $\overline{1}$,6867502 + |
| 56 | $\xi_1$ | + 6.53 | 68 | $\xi_2$ | + 0,49 |
| 57 | $— (M_1 — I_1)$ | — 2,87 | 69 | $— (M_2 — I_2)$ | — 2,65 |
| 58 | $Z_3 — Z_1$ | + 3,77 | 70 | $Z_3 — Z_2$ | — 2,16 |
| 59 | $Z_1$ | 63,23 | 71 | $Z_2$ | 69.19 |
| 60 | $Z_3$ | 67,00 | 72 | $Z_3$ | 67,03 |

7. *Influence de la courbure de la Terre.* — En calculant la cote Z (ou $Z_3$) du point inconnu en fonction de la cote $z$ (ou $Z_1$, ou $Z_2$) du point connu, de la distance horizontale D des deux points,

$$D = \left|\frac{X_3 - X_1}{\cos L_1}\right| = \left|\frac{Y_3 - Y_1}{\sin L_1}\right| \quad \text{ou} \quad D = \left|\frac{X_3 - X_2}{\cos L_2}\right| = \left|\frac{Y_3 - Y_2}{\sin L_2}\right|,$$

et de l'angle de pente $p$ ($p_1$ ou $p_2$) par la formule

$$Z = z \pm D \operatorname{tg} p \mp (M - I),$$

avec les signes supérieurs ou inférieurs suivant que le point de station est le point connu ou le point inconnu, nous nous sommes maintenus dans l'hypothèse sur laquelle repose la Topographie vis-à-vis de la Géodésie : nous avons supposé parallèles toutes les verticales du terrain topographique, et nous avons, par conséquent, considéré le géoïde comme une surface plane.

Cette hypothèse est mise en défaut bien plus rapidement suivant la coordonnée altimérique Z que suivant les coordonnées planimétriques X et Y : il suffit d'une distance D de quelques centaines de mètres pour qu'il y ait lieu de tenir compte de l'erreur ainsi introduite dans la valeur de Z.

En deuxième approximation, considérons donc le géoïde comme sphérique, et soit R le rayon de cette surface, au centre de laquelle concourent toutes les verticales.

N'envisageons d'abord que le cas dans lequel le point de station est celui dont les coordonnées sont connues. La distance du centre de l'instrument au centre de la Terre est $R + z + I$, et celle du point visé sur la mire est $R + Z + M$. La ligne de visée fait un angle $p$ avec l'horizon du point de station, ou un angle ($p$ + 1 *droit*) avec la direction nadirale de la verticale de ce point. Enfin, soit $\alpha$ l'angle de la verticale du point de station et de la verticale de la mire.

Dans le triangle ayant pour sommets le centre de la Terre, le centre de l'instrument et le point visé de la mire,

$$\frac{R + Z + M}{\cos p} = \frac{R + z + I}{\cos(\alpha + p)},$$

d'où

$$Z = \frac{(R + z + I)\cos p}{\cos(\alpha + p)} - R - M,$$

tandis que $\alpha$ est connu comme angle interceptant sur la circonférence de rayon $(R + z)$ un arc égal à la distance D.

La mesure de l'angle $\alpha$ avec le radian pour unité est nécessairement un nombre très petit. La table ci-dessous indique à quelles distances D (en mètres) correspondraient, sur le géoïde sphérique, des angles au centre $\alpha$ dont les mesures (en radians) seraient 0,0001, 0,0002,... Dans le calcul de cette table, on a adopté $R = \frac{40\,000\,000}{2\pi}$.

| | |
|---|---|
| $\alpha = 0{,}0001$ | $D = 636{,}62$ |
| 0,0002 | 1273,24 |
| 0,0003 | 1909,86 |
| 0,0004 | 2546,48 |
| 0,0005 | 3183,10... |

De la petitesse de la mesure de l'angle $\alpha$ résulte la légitimité de remplacer le facteur $\frac{\cos p}{\cos(\alpha+p)}$ par son développement en série suivant les puissances croissantes de $\alpha$, limité au terme de tel degré ; nous nous arrêterons au terme en $\alpha^2$ :

$$\frac{\cos p}{\cos(\alpha + p)} = 1 + \alpha \operatorname{tg} p + \frac{\alpha^2}{2}\,\frac{1 + \sin^2 p}{1 - \sin^2 p}$$

ou

$$\frac{\cos p}{\cos(\alpha + p)} = 1 + \frac{D}{R + z}\operatorname{tg} p + \frac{1}{2}\left(\frac{D}{R + z}\right)^2 \frac{1 + \sin^2 p}{1 - \sin^2 p}.$$

La structure de ce développement montre que son adoption n'est légitime que si l'angle de pente $p$ ne s'approche pas d'un angle droit, condition toujours réalisée dans les opérations topographiques.

A cette approximation, la formule pour le calcul des cotes devient

$$Z = z + D\,\frac{R + z + I}{R + z}\operatorname{tg} p + \frac{D^2}{2}\cdot\frac{R + z + I}{(R + z)^2}\cdot\frac{1 + \sin^2 p}{1 - \sin^2 p} - (M -$$

ou bien, évidemment,

$$Z = z + D \operatorname{tg} p + \frac{D^2}{2(R + z)^2}\,\frac{1 + \sin^2 p}{1 - \sin^2 p} - (M - I).$$

Du troisième terme du second membre, détachons le facteur

$$\frac{D}{R + Z} \quad \text{ou} \quad \frac{D}{R}\left(1 - \frac{z}{R} + \cdots\right).$$

Dans ce terme déjà très petit, où, par hypothèse, $p$ reste éloigné d'un angle droit, $z/R$ est sûrement négligeable vis-à-vis de l'unité ; et la formule pour le calcul des cotes est

$$Z = z + D \operatorname{tg} p + \frac{D^2}{2R} \cdot \frac{1 + \sin^2 p}{1 - \sin^2 p} - (M - I).$$

Si, contrairement à ce qui a été supposé dans le calcul précédent, le point de station est celui dont la cote est inconnue, $p$ et $(M - I)$ changent de signe, et le terme de correction de la courbure de la Terre, où $p$ n'entre que par le carré de son sinus, n'en est pas modifié.

La formule générale est donc

$$Z = z \pm D \operatorname{tg} p + \frac{D^2}{2R} \cdot \frac{1 + \sin^2 p}{1 - \sin^2 p} \mp (M - I),$$

avec les signes supérieurs ou les signes inférieurs suivant que la cote du point de station est connue ou inconnue.

8. *Influence de la réfraction atmosphérique.* — Une autre correction nécessaire lors des grandes lignes de visée est celle de la réfraction atmosphérique. On admet que, dans une visée de l'une à l'autre de deux verticales faisant entre elles un angle $\alpha$, la réfraction atmosphérique augmente l'angle de pente des 0,08 de l'angle $\alpha$ ; ainsi, dans la formule pour le calcul des cotes, l'angle de pente apparent $p$, qui a été lu sur le cercle vertical du théodolite, doit être remplacé par l'angle de pente vrai

$$p - 0{,}08\,\alpha.$$

Cette correction nouvelle est sûrement tout à fait négligeable dans le terme déjà très petit par lequel il a été tenu compte de la courbure de la Terre. Le deuxième terme seul doit être modifié et devient

$$\pm D \operatorname{tg} (p - 0{,}08\,\alpha).$$

Le second facteur, fonction de $\alpha$, peut être remplacé par son développement en série suivant les puissances croissantes de $\alpha$, limité au terme du premier degré :

$$\operatorname{tg} p - \frac{0{,}08}{\cos 2p}\,\alpha \quad \text{ou} \quad \operatorname{tg} p - \frac{0{,}08}{\cos 2p} \cdot \frac{D}{R};$$

de sorte que la formule finale pour le calcul des cotes est

$$Z = z \pm D \operatorname{tg} p + \frac{D^2}{2R} \frac{1 \mp 0{,}16 + \sin^2 p}{1 - \sin^2 p} \mp (M - I)$$

ou bien

$$Z = z \pm D \operatorname{tg} p + \frac{D^2}{2R} \frac{3 \mp 0{,}32 - \cos 2p}{1 + \cos 2p} \mp (M - I)$$

En résumé, le terme de correction de la courbure de la Terre et de la réfraction atmosphérique est

$$C_1 = \frac{D^2}{2R} \cdot \frac{2{,}68 - \cos 2p}{1 + \cos 2p}$$

ou

$$C_2 = \frac{D^2}{2R} \cdot \frac{3{,}32 - \cos 2p}{1 + \cos 2p}$$

suivant que la cote du point de station est connue ou inconnue.

9. *Visée horizontale.* — Dans une visée horizontale, c'est-à-dire appartenant à l'horizon du point de station, les corrections $C_1$ et $C_2$ se réduisent respectivement à

$$c_1 = 0{,}84 \frac{D^2}{2R}$$

et

$$c_2 = 1{,}16 \frac{D^2}{2R}.$$

Pour des valeurs de D allant de 20 en 20 m., depuis D = 100 m., jusque D = 2000 m., nous allons, dans la *Table I* ci-dessous, écrire, au millimètre près, les valeurs de

$$\rho = \frac{D^2}{2R}, \qquad c_1 = 0{,}84\,\rho, \qquad c_2 = 1{,}16\,\rho.$$

**Table I.**

| D | $\rho$ | $c_1$ | $c_2$ | D | $\rho$ | $c_1$ | $c_2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| mètres | | | | mètres | | | |
| 100 | 0,001 | 0,001 | 0,001 | 900 | 0,063 | 0,052 | 0,073 |
| 120 | 0,001 | 0,001 | 0,001 | 920 | 0,066 | 0,054 | 0,076 |
| 140 | 0,002 | 0,002 | 0,002 | 940 | 0,069 | 0,057 | 0,079 |
| 160 | 0,002 | 0,002 | 0,002 | 960 | 0,072 | 0,060 | 0,082 |
| 180 | 0,003 | 0,002 | 0,003 | 980 | 0,075 | 0,063 | 0,086 |
| 200 | 0,003 | 0,003 | 0,003 | 1000 | 0,078 | 0,066 | 0,090 |
| 220 | 0,004 | 0,003 | 0,004 | 1020 | 0,081 | 0,069 | 0,094 |
| 240 | 0,004 | 0,004 | 0,005 | 1040 | 0,084 | 0,071 | 0,098 |
| 260 | 0,005 | 0,004 | 0,006 | 1060 | 0,087 | 0,074 | 0,102 |
| 280 | 0,006 | 0,005 | 0,007 | 1080 | 0,090 | 0,077 | 0,106 |
| 300 | 0,007 | 0,006 | 0,008 | 1100 | 0,093 | 0,080 | 0,110 |
| 320 | 0,008 | 0,007 | 0,009 | 1120 | 0,097 | 0,083 | 0,114 |
| 340 | 0,009 | 0,008 | 0,010 | 1140 | 0,101 | 0,086 | 0,118 |
| 360 | 0,010 | 0,009 | 0,011 | 1160 | 0,105 | 0,089 | 0,122 |
| 380 | 0,011 | 0,010 | 0,012 | 1180 | 0,109 | 0,092 | 0,126 |
| 400 | 0,012 | 0,011 | 0,013 | 1200 | 0,113 | 0,095 | 0,130 |
| 420 | 0,013 | 0,012 | 0,015 | 1220 | 0,117 | 0,098 | 0,134 |
| 440 | 0,014 | 0,013 | 0,017 | 1240 | 0,121 | 0,101 | 0,139 |
| 460 | 0,015 | 0,014 | 0,019 | 1260 | 0,125 | 0,104 | 0,144 |
| 480 | 0,016 | 0,015 | 0,021 | 1280 | 0,129 | 0,107 | 0,149 |
| 500 | 0,018 | 0,017 | 0,023 | 1300 | 0,133 | 0,110 | 0,154 |
| 520 | 0,020 | 0,018 | 0,025 | 1320 | 0,137 | 0,113 | 0,159 |
| 540 | 0,022 | 0,019 | 0,027 | 1340 | 0,141 | 0,117 | 0,164 |
| 560 | 0,024 | 0,020 | 0,029 | 1360 | 0,145 | 0,121 | 0,169 |
| 580 | 0,026 | 0,021 | 0,031 | 1380 | 0,149 | 0,125 | 0,174 |
| 600 | 0,028 | 0,022 | 0,033 | 1400 | 0,153 | 0,129 | 0,179 |
| 620 | 0,030 | 0,024 | 0,035 | 1420 | 0,157 | 0,133 | 0,184 |
| 640 | 0,032 | 0,026 | 0,037 | 1440 | 0,161 | 0,137 | 0,189 |
| 660 | 0,034 | 0,028 | 0,039 | 1460 | 0,165 | 0,141 | 0,194 |
| 680 | 0,036 | 0,030 | 0,041 | 1480 | 0,171 | 0,145 | 0,199 |
| 700 | 0,038 | 0,032 | 0,043 | 1500 | 0,176 | 0,149 | 0,204 |
| 720 | 0,040 | 0,034 | 0,046 | 1520 | 0,181 | 0,153 | 0,209 |
| 740 | 0,042 | 0,036 | 0,049 | 1540 | 0,186 | 0,157 | 0,215 |
| 760 | 0,044 | 0,038 | 0,052 | 1560 | 0,191 | 0,161 | 0,221 |
| 780 | 0,046 | 0,040 | 0,055 | 1580 | 0,196 | 0,165 | 0,227 |
| 800 | 0,048 | 0,042 | 0,058 | 1600 | 0,201 | 0,169 | 0,233 |
| 820 | 0,051 | 0,044 | 0,061 | 1620 | 0,206 | 0,173 | 0,239 |
| 840 | 0,054 | 0,046 | 0,064 | 1640 | 0,211 | 0,177 | 0,245 |
| 860 | 0,057 | 0,048 | 0,067 | 1660 | 0,216 | 0,181 | 0,251 |
| 880 | 0,060 | 0,050 | 0,070 | 1680 | 0,221 | 0,185 | 0,257 |

Table I (*suite*).

| D | $\rho$ | $c_1$ | $c_2$ | D | $\rho$ | $c_1$ | $c_2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| mètres | | | | mètres | | | |
| 1700 | 0,226 | 0,189 | 0,263 | 1900 | 0,284 | 0,238 | 0,329 |
| 1720 | 0,231 | 0,193 | 0,269 | 1920 | 0,290 | 0,243 | 0,336 |
| 1740 | 0,236 | 0,198 | 0,275 | 1940 | 0,296 | 0,248 | 0,343 |
| 1760 | 0,242 | 0,203 | 0,281 | 1960 | 0,302 | 0,253 | 0,350 |
| 1780 | 0,248 | 0,208 | 0,287 | 1980 | 0,308 | 0,258 | 0,357 |
| 1800 | 0,254 | 0,213 | 0,294 | 2000 | 0,314 | 0,264 | 0,365 |
| 1820 | 0,260 | 0,218 | 0,301 | » | » | » | » |
| 1840 | 0,266 | 0,223 | 0,308 | » | » | » | » |
| 1860 | 0,272 | 0,228 | 0,315 | » | » | » | » |
| 1880 | 0,278 | 0,233 | 0,322 | » | » | » | » |

10. — *Visée quelconque. Calcul pratique.* — A toute approximation et à toute valeur proposée de la distance D correspondent deux angles de pente égaux et de signes contraires tels que, pour tout angle de pente $p$ appartenant à l'intervalle qu'ils définissent, les facteurs

$$\frac{2{,}68 - \cos 2p}{1 + \cos 2p} \quad \text{et} \quad \frac{3{,}32 - \cos 2p}{1 + \cos 2p}$$

peuvent être remplacés respectivement par 0,84 et 1,16, valeurs qu'ils prennent en toute rigueur pour $p = 0$.

En vue de la recherche de ces intervalles correspondant aux diverses valeurs de D, définissons l'approximation en demandant que soit inférieure à

$$\varepsilon \,.\, 0^m{,}001$$

la différence des valeurs trouvées d'une part en faisant $p = 0$, d'autre part en donnant à $p$ sa valeur réelle; ainsi, lorsqu'on désirera

une approximation de $0^m{,}001$, on fera $\varepsilon = 1$,
— $0^m{,}005$, — $\varepsilon = 5$,
— $0^m{,}010$, — $\varepsilon = 10$.

Les angles extrêmes cherchés seront notés $p_1$ ou $p_2$ suivant que la cote du point de station est connue ou inconnue; ce seront les moindres angles en valeur absolue satisfaisant aux équations

$$\frac{D^2}{2R} \frac{2{,}68 - \cos 2p_1}{1 + \cos 2p_1} - 0{,}84 \frac{D^2}{2R} = \varepsilon \,.\, 0{,}001,$$

$$\frac{D^2}{2R}\,\frac{3{,}32 - \cos 2p_2}{1 + \cos 2p_2} - 1{,}16\,\frac{D^2}{2R} = \varepsilon \,.\, 0{,}001,$$

ou

$$1{,}84\,\frac{1 - \cos 2p_1}{1 + \cos 2p_1}\,\frac{D^2}{2R} = \varepsilon \,.\, 0{,}001,$$

$$2{,}16\,\frac{1 - \cos 2p_2}{1 + \cos 2p_2}\,\frac{D^2}{2R} = \varepsilon \,.\, 0{,}001.$$

Ces équations donnent

$$\operatorname{cotg} p_1 = \pm \sqrt{\frac{1840}{\varepsilon}\,\frac{D^2}{2R}}$$

$$\operatorname{cotg} p_2 = \pm \sqrt{\frac{2160}{\varepsilon}\,\frac{D^2}{2R}}\,.$$

La table II ci-dessous montre quelles sont les valeurs absolues $|\,p_1\,|$ et $|\,p_2\,|$ des angles extrêmes $p_1$ et $p_2$, à l'approximation du millimètre, définie par

$$\varepsilon = 1,$$

pour les valeurs de la distance D, de 100 en 100 mètres, depuis D = 100 m. jusque D = 2000 m.

**Table II.**

| D | $\lvert p_1 \rvert$ | $\lvert p_2 \rvert$ | D | $\lvert p_1 \rvert$ | $p_2 \rvert$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 100 mèt. | 39°19' | 37° 8' | 1100 mèt. | 4°19' | 3°59' |
| 200 » | 22 37 | 21 6 | 1200 » | 3 57 | 3 39 |
| 300 » | 15 28 | 14 16 | 1300 » | 3 39 | 3 22 |
| 400 » | 11 44 | 10 50 | 1400 » | 3 24 | 3 8 |
| 500 » | 9 27 | 8 43 | 1500 » | 3 10 | 2 55 |
| 600 » | 7 53 | 7 17 | 1600 » | 2 58 | 2 44 |
| 700 » | 6 46 | 6 15 | 1700 » | 2 47 | 2 34 |
| 800 » | 5 56 | 5 28 | 1800 » | 2 37 | 2 26 |
| 900 » | 5 17 | 4 50 | 1900 » | 2 28 | 2 18 |
| 1000 » | 4 45 | 4 24 | 2000 » | 2 20 | 2 12 |

Dans les intervalles définis par la Table II (pour $\varepsilon = 1$), il suffira d'adopter (à l'approximation correspondante), pour une distance D, le nombre donné par la Table I, soit dans la colonne $c_1 = 0{,}84\rho$, soit dans la colonne $c_2 = 1{,}16\rho$.

En dehors de ces intervalles, il faudra multiplier le nombre $\rho = \frac{D^2}{2R}$ fourni par la même Table I, soit par le facteur

$$f_1 = \frac{2.68 - \cos 2p}{1 + \cos 2p},$$

soit par le facteur

$$f_2 = \frac{3{,}32 - \cos 2p}{1 + \cos 2p}$$

suivant que la cote du point de station est connue ou inconnue.

La Table III ci-dessous renferme, au dix-millième près, les valeurs de ces facteurs pour des angles $p$ en valeur absolue, de demi en demi-degré, depuis $p = 0$ jusque $p = 20°$.

**Table III.**

| $p$ | $f_1$ | $f_2$ | $p$ | $f_1$ | $f_2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0° 0′ | 0,840 | 1,160 | 10° 30′ | 0,903 | 1,234 |
| 0 30 | 0,841 | 1,161 | 11 0 | 0,909 | 1,241 |
| 1 0 | 0,842 | 1,162 | 11 30 | 0,916 | 1,249 |
| 1 30 | 0,843 | 1,163 | 12 0 | 0,923 | 1,257 |
| 2 0 | 0,844 | 1,164 | 12 30 | 0,930 | 1,266 |
| 2 30 | 0,845 | 1,165 | 13 0 | 0,938 | 1,275 |
| 3 0 | 0,846 | 1,167 | 13 30 | 0,946 | 1,284 |
| 3 30 | 0,847 | 1,169 | 14 0 | 0,954 | 1,294 |
| 4 0 | 0,849 | 1,171 | 14 30 | 0,963 | 1,304 |
| 4 30 | 0,851 | 1,173 | 15 0 | 0,972 | 1,315 |
| 5 0 | 0,854 | 1,176 | 15 30 | 0,981 | 1,326 |
| 5 30 | 0,857 | 1,179 | 16 0 | 0,991 | 1,337 |
| 6 0 | 0,860 | 1,183 | 16 30 | 1,001 | 1,349 |
| 6 30 | 0,864 | 1,187 | 17 0 | 1,011 | 1,361 |
| 7 0 | 0,868 | 1,192 | 17 30 | 1,022 | 1,374 |
| 7 30 | 0,872 | 1,197 | 18 0 | 1,033 | 1,387 |
| 8 0 | 0,876 | 1,201 | 18 30 | 1,045 | 1,401 |
| 8 30 | 0,881 | 1,207 | 19 0 | 1,057 | 1,415 |
| 9 0 | 0,886 | 1,213 | 19 30 | 1,070 | 1,430 |
| 9 30 | 0,891 | 1,220 | 20 0 | 1,083 | 1,445 |
| 10 0 | 0,897 | 1,227 | | | |

11. *Construction de nomogrammes.* — Les corrections

$$C_1 = \frac{D^2}{2R}\,\frac{2{,}68 - \cos 2p}{1 + \cos 2p},$$

$$C_2 = \frac{D^2}{2R}\,\frac{3{,}32 - \cos 2p}{1 + \cos 2p}$$

sont des fonctions de la distance D et de l'angle de pente $p$. Chacune pourrait faire l'objet d'une table à double entrée. La préparation d'une pareille table est toujours pénible et son usage souvent incommode. La construction et l'emploi d'un nomogramme à points alignés sont bien plus avantageux.

Nous allons construire un nomogramme à points alignés de la correction $C_1$, et ce qui aura été dit à cette occasion sera valable pour la construction du nomogramme de la correction $C_2$. La construction du nomogramme sera décrite au moyen des principes élémentaires de la Géométrie analytique plane, indépendamment des théories nomographiques, par un procédé simple applicable dans un grand nombre de cas.

L'épure portera trois échelles graduées respectivement en D, en $p$ et en $C_1$, de façon que si l'on joint par une droite deux points, l'un sur l'une et l'autre sur l'autre des deux premières échelles, et définis par des valeurs numériques de D et de $p$, cette droite rencontre l'échelle des $C_1$, au point dont la cote est la valeur demandée de $C_1$ (fig. 5).

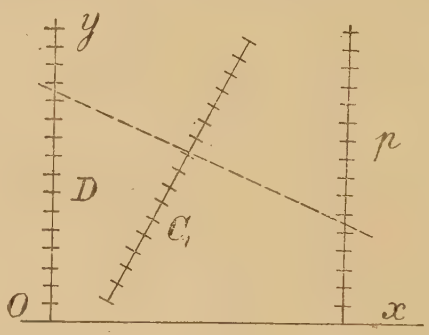


Fig. 5.

Rapportons l'épure à deux axes rectangulaires des $x$ et des $y$. L'axe des $y$ portera l'échelle des D, et l'échelle des $p$ aura pour support une parallèle à l'axe des $y$, à une distance (positive) $a$ de celle-ci; cette distance sera choisie ultérieurement d'après les dimensions que l'on désirera donner au dessin.

La relation entre $C_1$, D et $p$ sera considérée sous la forme logarithmique (logarithmes décimaux)

$$\log C_1 = \log \frac{D^2}{2R} + \log \frac{2{,}68 - \cos 2p}{1 + \cos 2p}.$$

L'échelle des D sera graduée linéairement en $\log \frac{D^2}{2R}$, et son équation paramétrique sera de la forme

$$y = m + n \log \frac{D^2}{2R}$$

moyennant deux constantes, $m$ et $n$, à choisir convenablement tantôt.

L'échelle des $p$ sera graduée linéairement en

$$\log \frac{2{,}68 - \cos 2p}{1 + \cos 2p},$$

et son équation paramétrique sera de la forme

$$y = m' + n' \log \frac{2{,}68 - \cos 2p}{1 + \cos 2p}$$

moyennant deux nouvelles constantes, $m'$ et $n'$, dont la détermination est réservée. Chacun des paramètres $m$, $n$, $m'$, $n'$ introduit un degré de liberté dans l'agencement définitif du nomogramme.

Soient $x$ et $y$ deux fonctions inconnues de $C_1$, coordonnées du point du plan qui sera marqué $C_1$. L'ensemble de ces deux fonctions constitue la définition paramétrique de l'échelle des $C_1$ (1).

Appelons points correspondants trois points, un sur chaque échelle, dont les cotes D, $p$ et $C_1$, satisfont à la fois à la relation proposée.

Conformément au principe des nomogrammes à points alignés, exprimons que trois points correspondants quelconques sont en ligne droite :

$$\begin{vmatrix} 0 & m + n \log \dfrac{D^2}{2R} & 1 \\ a & m' + n' \log \dfrac{2{,}68 - \cos 2p}{1 + \cos 2p} & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0$$

ou

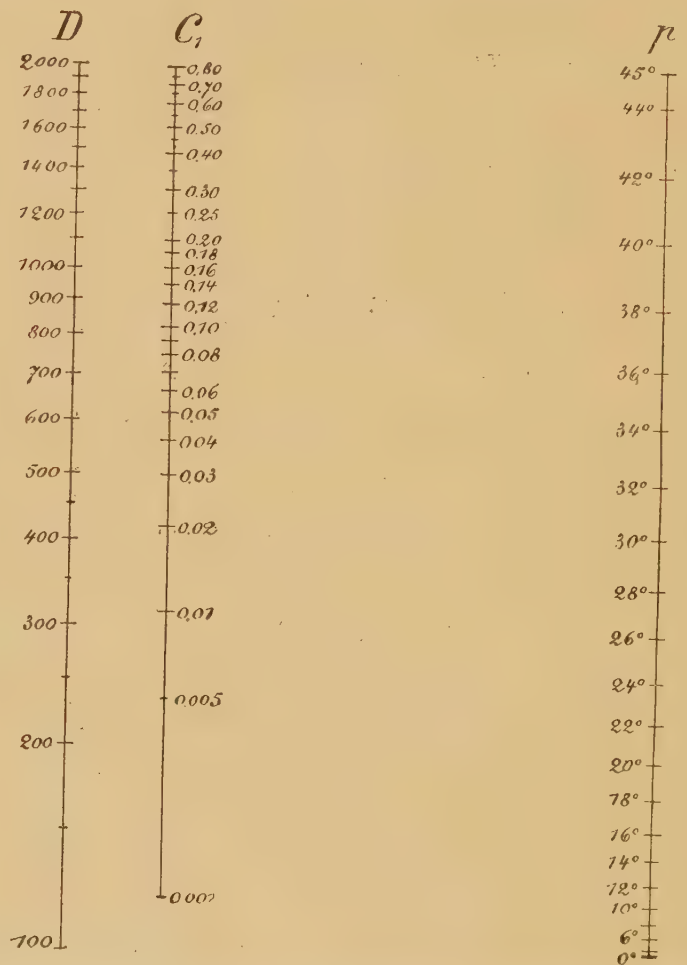
$$n(x-a) \log \frac{D^2}{2R} - n' x \log \frac{2{,}68 - \cos 2p}{1 + \cos 2p} + x(m-m') + ay - am = 0.$$

Par hypothèse cette égalité doit être équivalente à la relation logarithmique proposée en $C_1$, D et $p$. L'identification de

(1) Cette échelle sera rectiligne, comme il a déjà été annoncé. Ceci résulte de la structure de l'équation traduite en nomogramme, mais n'est pas du tout certain a priori. Pour une autre équation, la troisième échelle pourrait appartenir à une courbe quelconque.

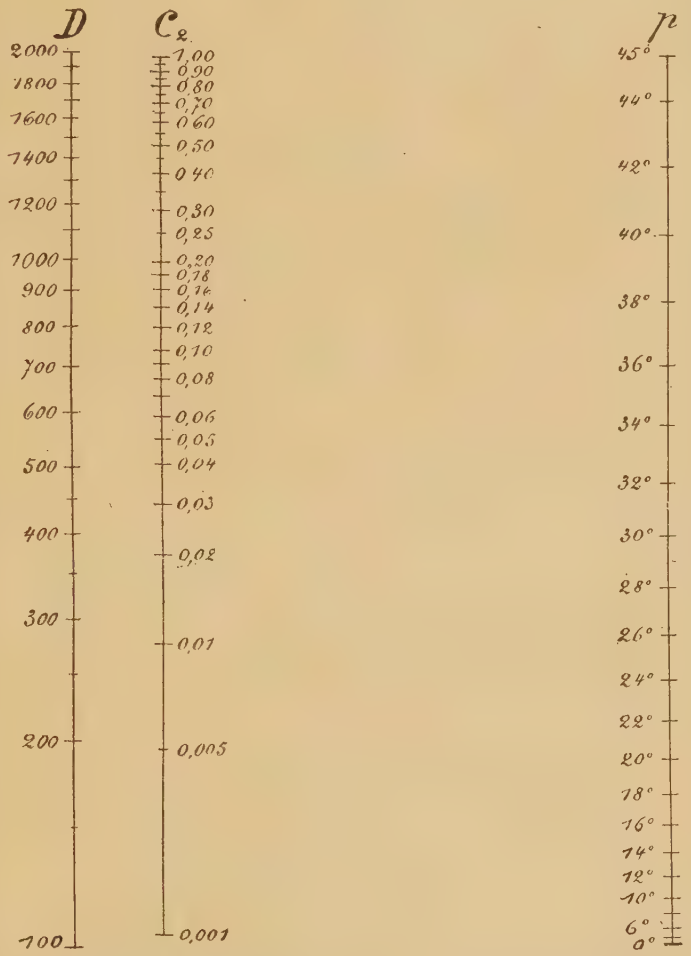
*Correction de la courbure de la Terre et de la réfraction atmosphérique.*

1. (Fig. 6). La cote du point visé est inconnue.



*Correction de la courbure de la Terre et de la réfraction atmosphérique.*

2. (Fig. 7). La cote du point de station est inconnue.



ces deux équations, considérés comme fonctions linéaires de leurs facteurs logarithmiques, fournit les égalités

$$\frac{n\,(x-a)}{-1} = \frac{n'\,x}{1} - \frac{x\,(m-m') + ay - am}{\log C_1}$$

qui constituent un système de deux équations par lesquelles on connaîtra $x$ et $y$ en fonction de $C_1$, à savoir :

$$\begin{cases} x = \dfrac{an}{n+n'}, \\ y = \dfrac{n\,n'\log C_1 + mn' + m'n}{n+n'}. \end{cases}$$

L'abscisse $x$ de tout point de l'échelle des $C_1$ est indépendante de sa cote $C_1$, et cette échelle appartient à une droite parallèle aux deux autres échelles. L'expression de $y$ définit la graduation de cette échelle.

Les paramètres $m$, $n$, $m'$, $n'$ vont se déterminer d'après les dimensions de l'épure et les valeurs extrêmes des variables indépendantes.

On a déjà appelé $a$ la largeur du rectangle occupé par le nomogramme ; soit $h$ sa hauteur. Appelons $D_1$ et $D_2$ les valeurs extrêmes susceptibles d'être prises (dans la pratique) par la distance D, $p_1$ et $p_2$ les valeurs extrêmes susceptibles d'être prises par l'angle de pente $|p|$. Nous allons veiller à ce que, au bas du rectangle, aux points dont l'ordonnée est nulle, les échelles des D et des $p$ portent respectivement les cotes $D_1$ et $p_1$, et à ce que, au haut du rectangle, aux points dont l'ordonnée est $h$, ces mêmes échelles portent respectivement les cotes $D_2$ et $p_2$ :

$$\begin{cases} 0 = m + n\log\dfrac{D_1^2}{2R}, \\ h = m + n\log\dfrac{D_2^2}{2R}, \\ 0 = m' + n'\log\dfrac{2{,}68 - \cos 2p_1}{1+\cos 2p_1}, \\ h = m' + n'\log\dfrac{2.68 - \cos 2p_2}{1+\cos 2p_2}; \end{cases}$$

par le premier système

$$n = \frac{h}{2\log\dfrac{D_2}{D_1}}, \qquad m = -n\log\frac{D_1^2}{2R},$$

et par le deuxième

$$n' = \frac{h}{\log\left(\frac{2{,}68 - \cos 2p_2}{2{,}68 - \cos 2p_1} \cdot \frac{1 + \cos 2p_1}{1 + \cos 2p_2}\right)},$$

$$m' = -n' \log \frac{2{,}68 - \cos 2p_1}{1 + \cos 2p_1}.$$

Passons aux nombres indiqués par la pratique des opérations topographiques. Il suffit évidemment de faire commencer l'échelle des distances à $D_1 = 100$ m.; comme nous n'avons en vue que les opérations topographiques, nous pourrons la limiter supérieurement à $D_2 = 2000$ m. Quant aux angles de pente, nous prévoirons tous les cas en adoptant $p_1 = 0, p_2 = 45°$.

Les valeurs correspondantes des paramètres sont

$$\begin{aligned} n &= 0{,}38431.h, \\ m &= 1{,}19325.h, \\ n' &= 1{,}9847.\ h, \\ m' &= 0{,}1503.\ h, \end{aligned}$$

proportionnelles, comme il était nécessaire, à la hauteur $h$ du nomogramme.

Eu égard à ces nombres, les équations paramétriques des trois échelles deviennent :

échelle des D $\begin{cases} x = 0, \\ y = \left(1{,}19325 + 0{,}38431 \log \frac{D^2}{2R}\right) h ; \end{cases}$

échelle des $p$ $\begin{cases} x = a, \\ y = \left(0{,}1503 + 1{,}9847 \log \frac{2.68 - \cos 2p}{1 + \cos 2p}\right) h ; \end{cases}$

échelle des $C_1$ $\begin{cases} x = 0{,}1621\ a, \\ y = (1{,}02406 + 0{,}32172 \log C_1)\ h. \end{cases}$

Le premier nomogramme ci-dessus (fig. 6) est une réduction à mi-grandeur du dessin original. Dans celui-ci, on a adopté

$$a = 0{,}16 \text{ m.} \qquad h = 0{,}24 \text{ m.}$$

de sorte que les équations paramétriques finalement mises en œuvre des échelles sont :

échelle des D $\begin{cases} x = 0, \\ y = 0{,}2864 - 0{,}0922344\,(7{,}10491 - 2\log \mathrm{D}), \ (1) ; \end{cases}$

échelle des $p$ $\begin{cases} x = 0{,}16, \\ y = 0{,}0361 + 0{,}47633 \log \dfrac{2.68 - \cos 2p}{1 + \cos 2p} ; \end{cases}$

échelle des $C_1$ $\begin{cases} x = 0{,}0259, \\ y = 0{,}2458 + 0{,}077213 \log C_1. \end{cases}$

Le nomogramme de la correction $C_2$ (fig. 7), pour le cas dans lequel le point de station est celui dont la cote est inconnue, a été construit de la même manière. Les formules successivement utilisées ont été les suivantes :

$$\begin{cases} \text{échelle des D} & \begin{cases} x = 0 \\ y = m + n \log \dfrac{D^2}{2R} \end{cases} \\ \text{échelle des } p & \begin{cases} x = a \\ y = m' + n' \log \dfrac{3{,}32 - \cos 2p}{1 + \cos 2p} \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = m + n \log \dfrac{D_1^2}{2R} & 0 = m' + n' \log \dfrac{3{,}32 - \cos 2p_1}{1 + \cos 2p_1} \\ h = m + n \log \dfrac{D_2^2}{2R} & h = m' + n' \log \dfrac{3{,}32 - \cos 2p_2}{1 + \cos 2p_2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} n = \dfrac{h}{2 \log \dfrac{D_2}{D_1}} \qquad m = -n \log \dfrac{D_1^2}{2R} \\ n' = \dfrac{h}{\log \left( \dfrac{3{,}32 - \cos 2p_2}{3{,}32 - \cos 2p_1} \cdot \dfrac{1 + \cos 2p_1}{1 + \cos 2p_2} \right)}, \ m' = -n' \dfrac{3{,}32 - \cos 2p_1}{1 + \cos 2p_1} \end{cases}$$

$$\text{échelle des } C_2 \quad \begin{cases} x = \dfrac{an}{n + n'} \\ y = \dfrac{nn' \log C_2 + mn' + m'n}{n + n'} \end{cases}$$

(1) Dans l'égalité qui définit la graduation en D, on a fait $2R = \dfrac{40\,000\,000}{\pi}$.

$$\begin{cases} D_1 = 100 \text{ m.} & p_1 = 0 \\ D_2 = 2000 \text{ m.} & p_2 = 45^\circ \end{cases}$$

échelle des D
$$\begin{cases} x = 0, \\ y = \left(1{,}19325 + 0{,}38431 \log \dfrac{D^2}{2R}\right) h \end{cases}$$

échelle des $p$
$$\begin{cases} x = a \\ y = \left(-0{,}14115 + 2{,}18972 \log \dfrac{3{,}32 - \cos 2p}{1 + \cos 2p}\right) h \end{cases}$$

échelle des $C_2$
$$\begin{cases} x = 0{,}1493\, a \\ y = (0{,}99406 + 0{,}32693 \log C_2)\, h \end{cases}$$

$a = 0{,}16$ m. $\qquad h = 0{,}24$ m.

échelle des D
$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0{,}2864 - 0{,}0922344\,(7{,}10491 - 2 \log D) \end{cases}$$

échelle des $p$
$$\begin{cases} x = 0{,}16 \\ y = -0{,}0339 + 0{,}525533 \log \dfrac{3{,}32 - \cos 2p}{1 + \cos 2p} \end{cases}$$

échelle des $C_2$
$$\begin{cases} x = 0{,}0239 \\ y = 0{,}2386 + 0{,}07846 \log C_2 \end{cases}$$

## CHAPITRE III.

### Le problème des trois points.

1. *Problème des trois points.* — On donne les coordonnées planimétriques $(X_1, Y_1)$, $(X_2, Y_2)$, $(X_3, Y_3)$ de trois points $P_1$, $P_2$, $P_3$. On demande les coordonnées planimétriques $(X, Y)$ d'un point P d'où les trois points donnés sont visibles, ainsi que l'azimut de la direction $PP_1$.

Chacun des points dont il est question dans l'énoncé de ce problème n'y intervient que par ses coordonnées planimétriques ; aussi chacun de ces points peut-il être arbitrairement déplacé le long de sa verticale, et le problème devrait, rigoureusement, s'énoncer de la manière suivante : on donne les coordonnées planimétriques $(X_1, Y_1)$, $(X_2, Y_2)$, $(X_3, Y_3)$ de trois verticales ; on demande les coordonnées planimétriques $(X, Y)$ de la verticale d'un point P duquel un point, respectivement $P_1$, $P_2$, $P_3$, est visible sur chacune des verticales données, ainsi que l'azimut de la direction $PP_1$.

Dans la pratique, aucune difficulté ne peut naître de la substitution, à cet énoncé, de l'énoncé habituel écrit en premier lieu (1).

Ce problème topographique, appelé aussi problème de Snellius, problème de Pothenot (on dit souvent *un Pothenot*), problème de la carte, est célèbre : il a provoqué la publication de nombreuses études, et on pourrait lui consacrer une notice historique intéressante. Nous ne nous arrêterons pas ici à ces considérations rétrospectives. Nous montrerons quel est l'intérêt du problème et ferons son étude analytique, indépendamment des travaux dont il a déjà fait l'objet.

Le problème des trois points s'applique dans les circonstances suivantes.

Lorsqu'on entreprend un lever topographique, on peut se trouver en présence de l'une des trois situations que voici :

*a*) Le choix des axes de coordonnées est tout à fait arbi-

(1) Aucune difficulté pratique ne peut naître non plus de la distribution des verticales dans le champ de la pesanteur ; il n'y a là qu'une difficulté théorique et dont il n'y aurait lieu de parler que dans une étude de Géodésie supérieure.

traire ; dans ce cas, il suffit de se rappeler que les axes topographiques sont déterminés dès qu'on se donne les trois coordonnées d'un point et l'azimut d'une direction issue de ce point.

*b*) Ou bien le programme du lever impose des axes adoptés dans un lever antérieur ; ce cas n'offre de particularité que lorsque ces axes sont définis par les coordonnées de points inaccessibles aux instruments.

*c*) Ou bien le programme du lever impose des axes définis géographiquement, et qui sont tel méridien et tel parallèle.

C'est évidemment le problème des trois points (ou un problème analogue, problème des deux points, étudié dans le chapitre suivant) qui permet de ramener le deuxième cas au premier. Enfin, nous verrons dans quelles circonstances et comment le troisième cas lui-même peut se ramener au deuxième.

2. *Opérations et solution graphique.* — On dispose d'un théodolite ; celui-ci peut se réduire à un cercle géodésique par suppression du cercle des hauteurs. L'instrument est installé au point P moyennant une orientation quelconque du cercle horizontal ; l'orientation la plus simple est celle pour laquelle la lecture sera *zéro* lorsque la ligne de visée passera par l'un des points donnés. On vise successivement les points $P_1$, $P_2$, $P_3$, et on prend note des lectures respectives $L_1$, $L_2$, $L_3$ sur le cercle horizontal.

Il y a une solution graphique évidente et bien connue. Les différences d'azimuts en valeur absolue, $|L_2 - L_1|$ et $|L_3 - L_2|$, sont les angles horizontaux sous lesquels, d'un point de la verticale du point P, on aperçoit respectivement les segments rectilignes ramenés à l'horizon $P_1 P_2$ et $P_2 P_3$. Or, sur le segment rectiligne horizontal $P_1 P_2$ (par exemple) s'appuient deux segments circulaires capables d'un angle $|L_2 - L_1|$ ; l'un est le lieu des points d'où l'on aperçoit le segment rectiligne horizontal $P_1 P_2$ sous l'angle $(L_2 - L_1)$ ; l'autre est le lieu des points d'où l'on aperçoit le même segment rectiligne sous l'angle $(L_1 - L_2)$. Moyennant, éventuellement, l'addition ou la soustraction de quatre angles droits, les lectures $L_1$ et $L_2$ ont toujours pu être faites de façon que la différence $(L_2 - L_1)$ soit positive. Alors, le point d'observation appartient, en projection horizontale, à l'un ou à l'autre des deux segments circulaires, suivant que cette différence est inférieure ou

supérieure à deux droits : si elle est inférieure à deux droits, le point d'observation P appartient au segment circulaire par rapport à chacun des points desquels les directions $PP_1$, $PP_2$ se succèdent, moyennant un angle moindre que deux droits, dans le sens des lectures croissantes au cercle horizontal du théodolite. Ainsi, avec ces précisions, la verticale du point de station passe par le deuxième point d'intersection des deux segments circulaires capables des angles $(L_2 - L_1)$ et $(L_3 - L_2)$, construits sur les segments horizontaux suivant lesquels se projettent les segments rectilignes $P_1\ P_2$ et $P_2\ P_3$.

Il y avait lieu de rappeler ici cette solution graphique, non seulement pour attirer l'attention sur la nécessité des précisions qui viennent d'être introduites à propos des angles et des segments circulaires correspondants, mais également pour signaler ce qui suit, qui, tout en ne présentant rien de neuf, est souvent perdu de vue.

La solution du problème est indéterminée lorsque les circonférences auxquelles appartiennent les deux segments circulaires sont confondues, c'est-à-dire lorsque les quatre points $P_1$, $P_2$, $P_3$, P ont leurs projections horizontales sur une même circonférence. Ce qui, en vue des opérations pratiques, dominées par la notion d'approximation, doit se comprendre de la manière suivante : la solution du problème des trois points s'appliquera dans des conditions d'autant moins avantageuses que les projections horizontales des quatre points $P_1$, $P_2$, $P_3$, P seront plus proches d'appartenir à une même circonférence.

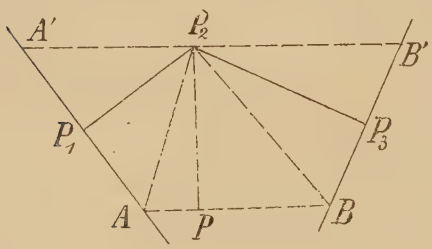


Fig. 8.

Voici une autre solution graphique, peu connue, et qui présente l'avantage de s'exécuter entièrement à la règle, à l'équerre et au rapporteur (fig. 8).

A une échelle convenable adoptée pour le dessin, marquer les positions $P_1$, $P_2$, $P_3$ des points observés. En $P_1$ élever la perpendiculatre à $P_1\ P_2$, et, en $P_3$, la perpendiculaire à $P_3\ P_2$. En $P_2$, d'une part à partir de $P_2\ P_1$, d'autre part à partir de $P_2\ P_3$, construire, en des sens inverses, respectivement l'angle $(L_2 - L_1)$ et l'angle $(L_3 - L_2)$. Le côté extrême du

premier de ces angles rencontre en un point A la perpendiculaire élevée en $P_1$; le côté extrême du deuxième angle rencontre en un point B la perpendiculaire élevée en $P_3$. La projection P du point d'observation est figurée au pied de la perpendiculaire abaissée du point $P_2$ sur la droite AB.

La justification de ce graphique consiste en ce que les quatre points $P_1$, $P_2$, A, P sont les sommets d'un quadrilatère inscriptible, qu'il en est de même des points $P_2$, $P_3$, B, P, et que les circonférences circonscrites à ces quadrilatères sont respectivement celles auxquelles appartiennent les segments capables des angles $(L_2 - L_1)$ et $(L_3 - L_2)$.

En disant que les angles $(L_2 - L_1)$ et $(L_3 - L_2)$ sont portés dans des sens inverses, celui-là à partir de $P_2$ $P_1$, celui-ci à partir de $P_2$ $P_3$, on a employé le langage algébrique : ils seraient, en valeur absolue, portés dans le même sens, si l'un était positif et l'autre négatif. Le mieux est de toujours s'arranger de façon que les différences $(L_2 - L_1)$ et $(L_3 - L_2)$ soient positives.

La description précédente garde une ambiguïté. Le premier des angles construits peut l'être, à partir de $P_2$ $P_1$, dans l'un ou l'autre sens. L'un de ces sens fournit la solution cherchée ; l'autre donne des points A′, B′ en ligne droite avec le point $P_2$. Pratiquement cette solution étrangère, qui correspond à l'intersection en $P_2$ des deux segments capables, s'écarte sans hésitation.

Si les quatre points $P_1$, $P_2$, $P_3$, P appartenaient, par leurs projections horizontales, à une même circonférence, les deux points A, B seraient confondus, et cesseraient de déterminer une ligne droite.

Le rapporteur à trois branches, ou stigmographe, trop peu connu, est un appareil qui fournit, d'une manière immédiate, sur la carte où sont figurés les points visés, la solution du problème des trois points. Une feuille de papier calque, sur laquelle on aura tracé trois demi-droites issues d'un même point et inclinées l'une sur l'autre comme les plans verticaux des lignes de visée, rendra les mêmes services.

3. *Solution analytique.* — Appelons L l'erreur d'orientation du cercle horizontal du théodolite vis-à-vis des axes de

coordonnées. Les lignes de visée ont pour azimuts vrais $L + L_1$, $L + L_2$, $L + L_3$.

Moyennant les coordonnées courantes $(x, y)$, les projections horizontales des lignes de visée ont pour équations.

$$PP_1 \ldots \; y - Y_1 = \operatorname{tg}(L + L_1)(x - X_1),$$
$$PP_2 \ldots \; y - Y_2 = \operatorname{tg}(L + L_2)(x - X_2),$$
$$PP_3 \ldots \; y - Y_3 = \operatorname{tg}(L + L_3)(x - X_3).$$

Les coordonnées (X, Y) du point P satisfont, par hypothèse, à ces trois équations, et les égalités

$$Y - Y_1 = \operatorname{tg}(L + L_1)(X - X_1),$$
$$Y - Y_2 = \operatorname{tg}(L + L_2)(X - X_2),$$
$$Y - Y_3 = \operatorname{tg}(L + L_3)(X - X_3)$$

constituent un système de trois équations aux trois inconnues X, Y, L.

Les inconnues (X, Y) ne s'y trouvent que sous forme linéaire; leur élimination laisse l'équation en L

$$\begin{vmatrix} \operatorname{tg}(L + L_1) & 1 & X_1 \operatorname{tg}(L + L_1) - Y_1 \\ \operatorname{tg}(L + L_2) & 1 & X_2 \operatorname{tg}(L + L_2) - Y_2 \\ \operatorname{tg}(L + L_3) & 1 & X_3 \operatorname{tg}(L + L_3) - Y_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Encore que cette équation transcendante en L se transforme immédiatement dans une équation algébrique en tg L, sa résolution semble bien devoir être pénible. De plus, l'équation algébrique en tg L sera du troisième degré. Mais, par nature du problème actuel, celui-ci ne comporte qu'une solution, et ceci nous fait prévoir que l'équation du troisième degré en tg L aura deux racines imaginaires.

Sans même qu'il faille effectuer la transformation de l'équation trigonométrique en une équation algébrique, nous allons voir que, en effet, le premier membre de l'équation ci-dessus est divisible par $(1 + \operatorname{tg}^2 L)$; en d'autres termes, nous allons voir que cette équation en tgL admet les racines imaginaires $+ i$ et $- i$.

Pour vérifier, d'abord, que le premier membre de cette équation s'annule quand on y remplace tg L par $+ i$, remarquons que, quel que soit un angle $\alpha$,

$$\operatorname{tg}(\text{arc tg } i + \alpha) = \frac{i + \operatorname{tg}\alpha}{1 - i \operatorname{tg}\alpha} = \frac{(i + \operatorname{tg}\alpha)(1 + i \operatorname{tg}\alpha)}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha} = i.$$

Ainsi, si un angle a pour tangente l'unité imaginaire, la

somme de cet angle et d'un angle quelconque a encore pour tangente l'unité imaginaire.

Appliquons cette propriété à chacun des éléments de la première colonne du déterminant premier membre de l'équation en L, en y considérant L comme un angle ayant pour tangente l'unité imaginaire, et en y faisant jouer le rôle de $\alpha$ respectivement par $L_1$, $L_2$, $L_3$ dans le premier, le deuxième et le troisième de ces éléments. Le déterminant premier membre devient alors

$$\begin{vmatrix} i & 1 & iX_1 - Y_1 \\ i & 1 & iX_2 - Y_2 \\ i & 1 & iX_3 - Y_3 \end{vmatrix},$$

expression identiquement nulle, et l'équation algébrique en tg L admet une première racine imaginaire $+ i$.

Ce qui vient d'être dit de l'unité imaginaire positive s'applique à l'unité imaginaire négative :

$$\text{tg}\,[\text{arc tg}\,(-i) + \alpha] = -i,$$

quel que soit l'angle $\alpha$. Le déterminant en tg L s'annule pour $\text{tg L} = -i$, qui est une deuxième racine imaginaire de l'équation en tg L du problème des trois points.

On a ainsi démontré que le premier membre de cette équation est divisible par $(\text{tg L} - i)(\text{tg L} + i) = 1 + \text{tg}^2\text{L}$.

Le premier membre de l'équation algébrique en tg L est un polynome du troisième degré de la forme

$$A_0\,\text{tg}^3\text{L} + A_1\,\text{tg}^2\,\text{L} + A_2\,\text{tg L} + A_3,$$

avec des coefficients qui le rendent divisible par $(\text{tg}^2\text{L} + 1)$, c'est-à-dire tels que

$$A_0 = A_2,\quad A_1 = A_3.$$

Le quotient de cette division est

$$A_2\,\text{tg L} \quad A_3$$

et la racine réelle de l'équation en tg L, solution du problème des trois points, est la racine de l'équation linéaire

$$A_2\,\text{tg L} + A_3 = 0$$

à savoir

$$\text{tg L} = -\begin{vmatrix} X_1 & \text{tg}\,L_1 - Y_1 & \text{tg}\,L_1 & 1 \\ X_2 & \text{tg}\,L_2 - Y_2 & \text{tg}\,L_2 & 1 \\ X_3 & \text{tg}\,L_3 - Y_3 & \text{tg}\,L_3 & 1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} Y_1 & \text{tg}\,L_1 + X_1 & \text{tg}\,L_1 & 1 \\ Y_2 & \text{tg}\,L_2 + X_2 & \text{tg}\,L_2 & 1 \\ Y_3 & \text{tg}\,L_3 + X_3 & \text{tg}\,L_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

En possession de tg L, et par conséquent de L, après avoir

levé l'indétermination propre à la fonction tangente au moyen d'un croquis qu'il suffira souvent de faire par la pensée, on calculera deux des sommes $(L + L_1)$, $(L + L_2)$, $(L + L_3)$, et on déduira les inconnues finales $(X, Y)$ du système linéaire formé par les deux équations primitives correspondantes. Dans la pratique on fera les trois sommes, et on résoudra les trois systèmes linéaires constitués des trois équations associées deux à deux, de manière à se ménager une vérification.

Les calculs relatifs à la résolution d'un Pothenot sont pénibles. Si l'on fait usage de logarithmes, ce qui sera généralement le cas, il faudra employer une table à sept décimales. Le mieux serait, en principe, de renoncer aux logarithmes, et d'employer une bonne table des fonctions trigonométriques dites naturelles ; mais ceci ne serait guère pratique que si l'on disposait d'une machine à calculer, ou si l'on s'était familiarisé avec le procédé de la multiplication abrégée, suivant la méthode d'Oughtred, qui évite le calcul des décimales inutiles (1).

4. *Solution par approximations successives.* — On peut prévoir plusieurs circonstances dans lesquelles les données du problème des trois points comportent la connaissance d'une valeur approchée de l'erreur d'orientation L du cercle horizontal par rapport aux axes de coordonnées. On se trouve, en particulier, dans de pareilles circonstances lorsque le théodolite est muni d'une aiguille aimantée, et qu'on connaît ou qu'on se trouve à même de calculer l'angle que fait l'axe topographique des $x$ avec le méridien ; il suffit alors de connaître la déclinaison magnétique au point et à l'instant des observations pour pouvoir en déduire l'azimut des lignes de visée. Mais ces derniers renseignements ne peuvent s'obtenir que d'une manière bien aléatoire, et une lecture à la boussole manque de précision. Aussi la valeur de L ainsi obtenue ne pourra-t-elle être considérée que comme valeur de première approximation. Nous l'appellerons $L_0$ et poserons

$$L = L_0 + \Delta L$$

pour la valeur exacte, ou, du moins, pour une valeur de deu-

(1) La publication d'une table des fonctions trigonométriques naturelles est actuellement en préparation, par les soins de l'Union géodésique internationale. Cette table contiendra, de minute en minute, avec 7 décimales exactes à une demi-unité près les valeurs des sinus et cosinus de 0 à 100 grades et celles des tangentes de 0 à 50 grades.

xième approximation. Exprimée au moyen du radian comme unité d'angle, la correction $\Delta L$ est une quantité petite : son carré est négligeable.

A cette approximation, le premier membre de l'équation en L de la solution rigoureuse peut être remplacé par son développement en série suivant les puissances croissantes de $\Delta L$, limité au terme du premier degré :

$$\begin{vmatrix} \operatorname{tg}(L_o + L_1) & 1 & X_1 \operatorname{tg}(L_o + L_1) - Y_1 \\ \operatorname{tg}(L_o + L_2) & 1 & X_2 \operatorname{tg}(L_o + L_2) - Y_2 \\ \operatorname{tg}(L_o + L_3) & 1 & X_3 \operatorname{tg}(L_o + L_3) - Y_3 \end{vmatrix}$$

$$+ \Delta L \begin{vmatrix} \sec^2(L_o + L_1) & 1 & X_1 \operatorname{tg}(L_o + L_1) - Y_1 \\ \sec^2(L_o + L_2) & 1 & X_2 \operatorname{tg}(L_o + L_2) - Y_2 \\ \sec^2(L_o + L_3) & 1 & X_3 \operatorname{tg}(L_o + L_3) - Y_3 \end{vmatrix}$$

$$+ \Delta L \begin{vmatrix} \operatorname{tg}(L_o + L_1) & 1 & X_1 \sec^2(L_o + L_1) \\ \operatorname{tg}(L_o + L_2) & 1 & X_2 \sec^2(L_o + L_2) \\ \operatorname{tg}(L_o + L_3) & 1 & X_3 \sec^2(L_o + L_3) \end{vmatrix} = 0 ;$$

d'où la valeur de $\Delta L$, dont on n'oubliera pas qu'elle est une mesure en radians.

Cette méthode constitue une solution par approximations successives en ce sens que la valeur $(L_o + \Delta L)$ de deuxième approximation peut ensuite jouer le rôle de $L_o$, moyennant un nouveau $\Delta L$, correction de troisième approximation, et ainsi de suite. Mais ceci n'est que théorique, car la solution rigoureuse est moins laborieuse que l'ensemble de deux approximations successives. Il est même probable que la plupart des calculateurs préfèreront la solution rigoureuse aux calculs de passage de première en deuxième approximation.

Il est cependant un cas dans lequel on tirera avantageusement parti de la connaissance approchée de L ; c'est le cas dans lequel on se contente de la détermination graphique du point d'observation.

Adoptons provisoirement pour L sa valeur approchée $L_o$. Les droites ayant pour azimuts $(L_o + L_1)$, $(L_o + L_2)$, $(L_o + L_3)$ et passant respectivement par les points $P_1$, $P_2$, $P_3$ ne se coupent généralement pas en un même point. Les deux premières de ces droites (fig. 9) se coupent en un point P, qui appartient au segment circulaire appuyé aux points $P_1$, $P_2$ et capable de l'angle $L_2 - L_1$ ; de même pour les deux autres couples de ces trois droites associées deux à deux, avec, pour leurs points

communs, $P'_1$ et $P'_2$. Si on faisait varier la valeur approchée $L_0$ d'une manière continue, on verrait les trois points $P'_1$, $P'_2$, $P'_3$ se déplacer, chacun le long d'un arc de circonférence ; pour

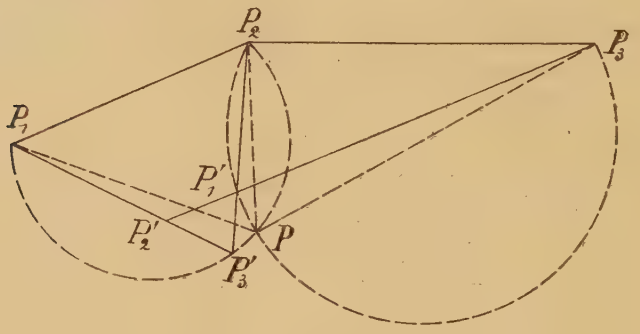



Fig. 9.

des valeurs de $L_0$ se rapprochant de la valeur exacte L, le « chapeau » $P'_1$ $P'_2$ $P'_3$ diminuerait progressivement, et ses trois sommets passeraient simultanément en un même point P du plan, le point exact d'observation, au delà duquel le chapeau réapparaîtrait dans l'orientation inverse : de part et d'autre du point P l'aire algébrique du chapeau se serait annulée en changeant de signe.

On voit qu'il suffirait de faire trois hypothèses sur la valeur de L, de prendre trois « fausses positions », sans même que les valeurs correspondantes de $L_0$ doivent être des valeurs approchées de L, de dessiner les trois chapeaux définis par ces valeurs, et de tracer les trajectoires nécessairement circulaires des trois sommets du triangle mobile dont ces chapeaux sont trois configurations particulières. Le point commun à ces trois circonférences est le point P demandé.

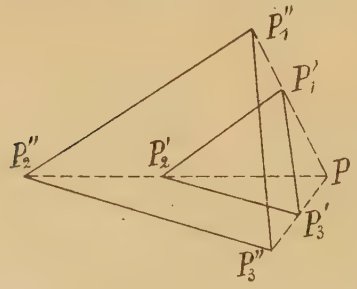



Fig. 10.

L'objection est immédiate. La solution graphique par intersection de segments comporte le tracé de deux circonférences; la solution proposée ici exige le tracé de trois circonférences; et mieux vaut s'en tenir à la première solution graphique. Aussi, dans la pratique(fig. 10), se contente-t-on de deux « fausses posi-

tions », de deux valeurs $L_0$ de L, mais de valeurs approchées par hypothèse, l'une déduite de la boussole, et l'autre légèrement différente (dans le sens dans lequel il y a le plus de chance d'amélioration).

Les sommets homologues des deux chapeaux sont joints par des droites, et, ces trois droites, sauf grossière erreur dans l'estimation $L_0$ de L, seront proches de passer par un même point.

5. *Rattachement à des axes définis géographiquement.* — Lorsque les axes topographiques imposés sont définis géographiquement, leur définition peut généralement s'exprimer de manière suivante.

Le plan des $xy$ ($z = 0$) est le plan horizontal correspondant (dans l'étendue du terrain topographique) à la surface de repère adoptée lors du nivellement général du pays. L'axe des $x$ appartient au méridien de telle longitude $\lambda_0$ *ouest* par rapport à Bruxelles (ancien observatoire), et est dirigé positivement vers le *nord*. L'axe des $y$ appartient au parallèle de telle latitude $\varphi_0$ *nord* et est dirigé vers l'*ouest* (1).

Ces définitions sont rédigées de manière à prévoir l'utilisation des publications de l'Institut cartographique militaire.

Le *raccordement en altitude* s'effectue par un nivellement, à partir de l'un des repères de l'État-major dans les environs du terrain (2).

(1) Pour être rigoureux, il faudrait définir l'axe des $y$ en des termes plus compliqués. Il faudrait dire : les azimuts sont comptés positivement du *nord* vers l'ouest, et l'axe des $y$ appartient au plan vertical de point $(\lambda_0, \varphi_0)$ dont l'azimut est égal à un droit : il est dirigé de façon que l'azimut de sa partie positive soit égal à un droit. L'expression employée dans le texte « l'axe des $y$ *appartient* au parallèle... » n'est tolérable qu'à l'approximation topographique.

(2) *Nivellement général du Royaume de Belgique*, publié avec l'autorisation de M. le Ministre de la Guerre par l'Institut cartographique militaire, un fascicule par province. Ce recueil date de 1880, et une enquête sera parfois nécessaire à l'identification des points indiqués, par exemple dans un cas comme celui-ci : Point n° 8482, commune de Winxele, seuil de la porte du cabaret tenu par la veuve Cluts, à la Montagne de fer, route de Louvain à Bruxelles, $68^m,16$. Les enseignes de cabaret ont pu passer d'une maison à l'autre. Les changements de porte sont fréquents, tandis que les seuils de porte ont souvent servi de repères. Parmi les 33 repères (Louvain et environs) reproduits dans les *Instructions* pour les exercices pratiques du cours de Topographie de l'Université de Louvain, deux au moins (1771, commune de Blanden, et 7964, commune de Héverlé) sont des seuils de portes qui ont été déplacées.

Le raccordement planimérique consiste dans (au moins) deux applications du problème de Pothenot, après observation de trois points dont les coordonnées topographiques sont connues (ou dans une application, au moins, du problème des deux points qui sera étudié dans le chapitre suivant).

Les publications de l'Institut cartographique militaire fournissent la longitude $\lambda$ et la latitude $\varphi$ des points géodésiques, sommets des triangulations des divers ordres. L'unité est le grade. Les longitudes sont comptées à partir du méridien de Bruxelles (ancien observatoire, en haut du boulevard du Jardin botanique, dans l'axe de la rue du Méridien), positivement vers l'*ouest* (1).

Le passage des coordonnées géographiques $(\lambda, \varphi)$ aux coordonnées topographiques $(x, y)$ en mètres, nécessaires à la préparation du problème de Pothenot, se fera d'une manière suffisante par les formules

$$x = (\varphi - \varphi_o)\ \frac{2\,\pi\,R}{400},$$

$$y = (\lambda - \lambda_o)\ \frac{2\,\pi\,R}{400} \cos\varphi_o,$$

où $(\lambda_o, \varphi_o)$ sont les coordonnées géographiques de l'origine des axes topographiques, et où R est, en mètres, le rayon de la Terre supposée sphérique et telle que

$$2\,\pi\,R = 40\,000\,000,$$

approximation à laquelle

$$x = 100\,000\ (\varphi - \varphi_o),$$
$$y = 100\,000\ (\lambda - \lambda_o)\cos\varphi_o.$$

Ces formules de transformation, qui sont celles de la représentation plate rectangulaire, seront, pour une même étendue du terrain à lever, d'autant plus satisfaisantes que l'origine $(\lambda_o, \varphi_o)$ des axes topographiques sera plus voisine de ce terrain.

Le *carnet d'instructions* des exercices pratiques du cours de Topographie de l'Université de Louvain renferme les coordonnées géographiques $(\lambda, \varphi)$ d'une trentaine de points de Louvain et de ses environs (extraites des publications de l'Institut cartographique) ainsi que les coordonnées topographiques $(x, y)$ de

(1) *Triangulation du Royaume de Belgique*, publiée avec l'autorisation de M. le Ministre de la Guerre par l'Institut Cartographique Militaire. Calcul des coordonnées géographiques et construction de la carte, t. III, 1881.

ces points calculées par les formules ci-dessus, moyennant une origine des axes topographiques définie par

$$\lambda_0 = -0^G,36, \quad \varphi_0 = 56^G,54.$$

Ces renseignements sont donnés en un tableau de la forme suivante (1).

| Points | $\lambda$ | $\varphi$ | $x$ | $y$ |
|---|---|---|---|---|
| Héverlé (cl. abb. Parck). | — 0,3871 35 | 56,5173 10 | — 2269,0 | — 1711,9 |
| Kessel-Loo (cl. abb. Vlierbeek) . . . . . | — 0,4085 55 | 56,5472 75 | + 727,5 | — 3063,2 |
| Louvain (flèche Saint-Pierre) . . . . . | — 0,3693 20 | 56,5336 25 | — 637,5 | — 588,0 |
| Louvain (cl. Sainte-Gertrude) . . . . . | — 0,3666 55 | 56,5387 75 | — 124,5 | — 421,1 |

Le même volume des publications de l'Institut cartographique renferme aussi des coordonnées planimétriques (X, Y) en regard des coordonnées géographiques de chacun des points géodésiques. Il faut prendre garde de les confondre avec celles dont on a besoin en vue d'un problème de Pothenot. Ces coordonnées (X, Y) sont celles de l'image du point auquel elles se rapportent, tel qu'il serait représenté sur une carte construite d'après le mode de représentation de la carte de l'État-Major, avec une échelle (des aires) égale à l'unité. Il s'agit de la représentation cartographique dite de Bonne, qui définit une carte équivalente, c'est-à-dire en chaque point de laquelle l'échelle des aires est la même (l'échelle de la carte dont on parle couramment, échelle commerciale de la carte, est alors

(1) Les coordonnées de Louvain (église Saint-Pierre) sont celles de l'axe du dôme incendié en 1914 ; l'axe de la flèche centrale actuelle appartient à la même verticale. D'autres points géodésiques indiqués dans le même carnet d'instructions donnent lieu aux remarques suivantes : l'église actuelle de Héverlé n'a pas été bâtie au même endroit que celle dont le clocher a servi de point géodésique : les coordonnées géographiques données pour Corbeek-Loo (château) et Everberg (clocher) ont paru suspectes.

la racine carrée de l'échelle des aires). Les axes des X et des Y de cette carte appartiennent à la droite qui représente le méridien de Bruxelles (ancien observatoire) et à la tangente, à son intersection avec cette droite, à l'arc de circonférence qui représente le parallèle de $56^G,00$. L'origine de ces axes se trouve dans les environs de Charleroi, sur le territoire de Monceau-sur-Sambre.

Supposons que l'on adopte pour axes topographiques le méridien et le parallèle (la tangente au parallèle) de tel point géodésique. Les coordonnées topographiques à adopter pour tel autre point géodésique, en vue d'un problème de Pothenot, ne sont pas du tout les différences des coordonnées cartographiques officielles de même nom (X ou Y) prises deux à deux.

Par exemple, en préparation d'un lever dans les environs de Louvain, on adopte pour axes de coordonnées, dans les sens précisés plus haut, le méridien et le parallèle de Louvain, flèche de l'église St-Pierre. Les coordonnées topographiques de quelques points géodésiques voisins, calculées par les formules ci-dessus, sont :

| | | |
|---|---|---|
| Héverlé (cl. abb. Parck) | $x = -1631,5$ | $y = -1124,0$ |
| Louvain (cl. Ste-Gertrude) | $+ 513,0$ | $+ 166,9$ |
| Kessel-Loo (cl. abb. Vlierbeek) | $+ 1365,0$ | $- 2475,5$ |

Les coordonnées cartographiques d'État-Major des points en question sont :

| | | |
|---|---|---|
| Louvain (fl. St-Pierre) | X = 53 469,9 | Y = — 23 387,0 |
| Héverlé (cl. abb. Parck) | 51 841,4 | — 24 522,7 |
| Louvain (cl. Ste-Gertrude) | 53 982,8 | — 23 217,1 |
| Kessel-Loo (cl. abb. Vlierbeek) | 54 847,2 | — 25 858,0 |

Les excès des nombres des trois dernières lignes sur les nombres correspondants de la première sont :

| | | |
|---|---|---|
| Héverlé (cl. abb. Parck) | — 1628,5 | — 1135,7 |
| Louvain (cl. Ste-Gertrude) | + 512,9 | + 169,9 |
| Kessel-Loo (cl. abb. Vlierbeek) | + 1377,3 | — 2471,0 |

On voit qu'on ne retrouve pas les coordonnées topographiques $(x, y)$ calculées ci-dessus. Les divergences de cette nature sont d'autant plus grandes que les points considérés sont plus éloignés du centre de la carte, origine $(X = 0, Y = 0)$ des coordonnées cartographiques.

## CHAPITRE IV.

### Le problème des deux points.

1. *Problème des deux points.* — On donne les coordonnées planimétriques $(X_1, Y_1)$, $(X_2, Y_2)$ de deux points $P_1$, $P_2$. On demande les coordonnées planimétriques (X, Y) d'un point P d'où sont visibles les deux points proposés, ainsi que l'azimut de la direction $PP_1$.

La remarque faite à propos de l'énoncé du problème des trois points s'applique encore ici. Il faudrait dire : on donne les coordonnées planimétriques $(X_1, Y_1)$, $(X_2, Y_2)$ de deux verticales; on demande les coordonnées planimétriques (X, Y) de la verticale d'un point P duquel un point, respectivement $P_1$ et $P_2$, est visible sur chacune des verticales proposées, ainsi que l'azimut de la direction $PP_1$. Aucune difficulté ne peut, dans la pratique, naître de la substitution d'un énoncé à l'autre.

Ce problème topographique des deux points, dit aussi problème de Hansen, a fait couler autant d'encre que le problème des trois points. L'étude des premiers travaux qu'il a provoqués ne serait pas sans intérêt. Certains de ces premiers travaux semblent bien avoir passé inaperçus, ou être, du moins, oubliés aujourd'hui. Dans une notice historique qui serait consacrée au problème des deux points, il y aurait lieu d'attirer l'attention sur une étude publiée dès 1829, dans laquelle ce problème était traité, tandis que la solution de Hansen ne remonte qu'à 1841.

Ce problème des deux points s'applique dans les mêmes circonstances que le problème des trois points, pour le rattachement du lever aux axes d'un lever antérieur, mais lorsqu'on ne dispose que de deux points visibles dont les coordonnées soient connues dans ce lever antérieur.

2. *Opérations et solution graphique.* — On dispose d'un théodolite qui peut se réduire à un cercle géodésique par suppression du cercle vertical. Dans le voisinage du point P (à une distance de celui-ci de l'ordre du demi-kilomètre au kilomètre) on fait choix d'un point P′ du terrain, remplissant les conditions suivantes :

*a*) que le point P′ soit accessible au théodolite et à une mire;

*b*) que les points P et P′ soient visibles l'un de l'autre;

*c*) que les points $P_1$ et $P_2$ soient visibles du point P′.

L'instrument est installé au point P, moyennant une orientation du cercle horizontal pour laquelle, par une visée sur la mire placée en P′, l'azimut de PP′ soit égal à zéro. Du point P on vise successivement les points $P_1$, $P_2$, et on prend note des lectures respectives $L_1$, $L_2$ sur le cercle horizontal.

L'instrument est ensuite installé au point P′, moyennant la même orientation du cercle horizontal ; cette orientation sera assurée par une visée sur la mire placée en P et une lecture d'azimut égale à deux droits. Du point P′ on vise successivement les points $P_1$ et $P_2$, et on prend note des lectures respectives $L'_1$, $L'_2$ sur le cercle horizontal.

Dans la solution graphique qui va être exposée, le plan de la figure représentera un plan horizontal, et les lettres P, P′, $P_1$, $P_2$ représenteront aussi bien les projections horizontales des points correspondants.

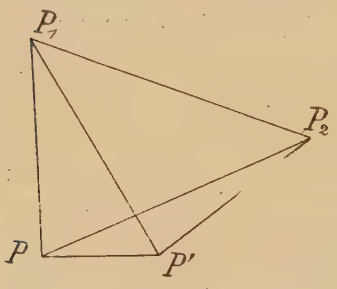


Fig. 11.

A une échelle convenable E, par rapport à des axes de coordonnées images des axes topographiques, et au moyen de leurs coordonnées connues, marquons sur l'épure les points $P_1$ et $P_2$.

D'autre part, sur une feuille de papier calque (fig. 11), marquons, à une distance quelconque l'un de l'autre, deux points, (P) et (P′), qui seront, provisoirement, des images des points P et P′.

Par le point (P) menons une demi-droite qui, dans le sens des rotations positives sur le cercle horizontal du théodolite, fasse avec la droite (P) (P′) un angle égal à la lecture $L_1$. Par le point (P′) menons une droite, qui dans le même sens, fasse avec la droite (P) (P′) (prolongée) un angle égal à la lecture $L'_1$. L'intersection de ces deux demi-droites sur le papier calque est l'image provisoire ($P_1$) du point $P_1$.

De même, au moyen des lectures $L_2$, $L'_2$, et par le tracé des deux demi-droites correspondantes issues de (P) et de (P′), marquons, sur la même figure, l'image provisoire ($P_2$) du point $P_2$.

Joignons par une droite les points ($P_1$), ($P_2$). — La feuille transparente porte actuellement, à une échelle inconnue E′, l'image du quadrilatère $PP'P_1P_2$ du terrain.

Superposons la feuille transparente à la feuille de l'épure définitive (fig. 12), de façon que le point $(P_1)$ de la première coïncide avec le point $P_1$ de la deuxième, et que la demi-droite $(P_1)$ $(P_2)$ de la première prenne la direction de la demi-droite $P_1P_2$ de la deuxième ; et piquons les points $(P_2)$, $(P)$, $(P')$ sur la feuille du dessin définitif.

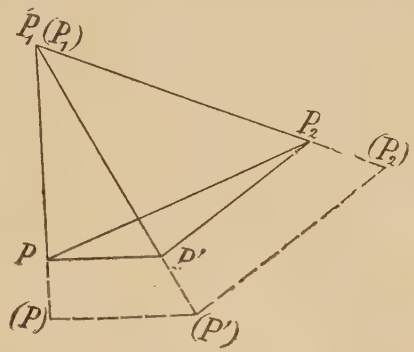


Fig. 12.

Le rapport du segment $(P_1)$ $(P_2)$ au segment $P_1P_2$ est le rapport $\frac{E'}{E}$ de l'échelle inconnue du dessin provisoire à l'échelle du dessin définitif. Il suffit donc de compléter le quadrilatère $P_1P_2PP'$ semblable au quadrilatère $(P_1)(P_2)(P)(P')$ et ayant déjà en commun avec lui, par hypothèse, les points $(P_1)$, $P_1$ et les droites $(P_1)(P_2)$, $P_1P_2$.

Cette solution graphique est l'interprétation géométrique de la solution numérique préconisée par M. Goedseels dans son enseignement de la Topographie aux Écoles spéciales de l'Université de Louvain (1). Voici les étapes de cette solution numérique :

1° Attribution d'une valeur numérique arbitraire, telle que 1000, à la distance $PP'$, ce qui équivaut à l'adoption d'une unité de longueur inconnue, le millième de $PP'$.

2° Adoption d'un système de coordonnées provisoires $(\xi,\eta)$ telles que les coordonnées des points P et P′ soient respectivement (0,0) et (1000,0), avec, pour sens de rotation, celui des rotations croissantes du théodolite.

3° Calcul des coordonnées provisoires $(\xi_1,\eta_1)$, $(\xi_2,\eta_2)$ des points $P_1,P_2$, eu égard aux azimuts provisoires $L_1$ et $L'_1$, $L_2$ et $L'_2$, ce qui est un double calcul de triangulation.

4° Indépendamment de l'unité de longueur (inconnue) adoptée, le *rapport* $\frac{\eta_1 - \eta_2}{\xi_1 - \xi_2}$ est la tangente de l'azimut provi-

(1) É. Goedseels, *Application de la Géométrie analytique aux problèmes de Topographie, de Géodesie et d'Astronomie, problème de Snellius dit problème de Pothenot, et problème de Hansen.* Annales de la Société scientifique de Bruxelles, t. 36 (1912), Mém., p. 187.

soire de la direction $P_1P_2$, direction dont l'azimut vrai a pour tangente le rapport $\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$ ; aucune difficulté pratique ne peut résulter de l'ambiguïté propre à la fonction tangente. La différence de l'azimut vrai et de l'azimut provisoire de la droite $P_1P_2$ est l'azimut de l'axe des $\xi$ par rapport aux axes topographiques définitifs des $xy$ : c'est l'erreur d'orientation des axes provisoires par rapport aux axes vrais.

5° Correction des azimuts provisoires $L_1$, $L_2$, $L'_1$, $L'_2$, eu égard à l'erreur d'orientation qui vient d'être obtenue, de façon qu'ils deviennent les azimuts vrais des droites $PP_1$, $PP_2$, $P'P_1$, $P'P_2$, respectivement.

6° Enfin, au moyen de ces azimuts vrais augmentés de deux droits, les coordonnées des points P et P′ résultent de deux calculs de triangulation, comme si chacune de ces triangulations était effectuée des points $P_1$ et $P_2$.

3. *Solution analytique.* — Appelons $(X', Y')$ les coordonnées inconnues du point auxiliaire P′, et L l'erreur d'orientation du cercle horizontal du théodolite par rapport aux axes topographiques. Les lignes de visée ont pour azimuts vrais $(L + L_1)$, $(L + L_2)$, $(L + L'_1)$, $(L + L'_2)$, et, moyennant les coordonnées courantes $(x, y)$, les projections horizontales des lignes de visée ont pour équations

$$\begin{aligned}
PP_1 \ldots\ & y - Y_1 = \operatorname{tg}(L + L_1)\,(x - X_1), \\
PP_2 \ldots\ & y - Y_2 = \operatorname{tg}(L + L_2)\,(x - X_2), \\
P'P_1 \ldots\ & y - Y_1 = \operatorname{tg}(L + L'_1)\,(x - X_1), \\
P'P_2 \ldots\ & y - Y_2 = \operatorname{tg}(L + L'_2)\,(x - X_2).
\end{aligned}$$

Les coordonnées $(X, Y)$ du point P satisfont par hypothèse aux deux premières de ces équations, et les coordonnées $(X', Y')$ du point P′ satisfont, de même, aux deux dernières :

$$\begin{aligned}
Y - Y_1 &= \operatorname{tg}(L + L_1)\,(X - X_1), \\
Y - Y_2 &= \operatorname{tg}(L + L_2)\,(X - X_2), \\
Y' - Y_1 &= \operatorname{tg}(L + L'_1)\,(X' - X_1), \\
Y' - Y_2 &= \operatorname{tg}(L + L'_2)\,(X' - X_2);
\end{aligned}$$

de plus, L est l'azimut de la droite PP′ :

$$Y - Y' = \operatorname{tg} L\,(X - X').$$

Ces cinq dernières égalités constituent un système de cinq équations aux cinq inconnues X, Y, X′, Y′, L.

Les inconnues X, Y, X′, Y′ ne s'y trouvent que sous la forme linéaire ; leur élimination laisse l'équation en L :

$$\begin{vmatrix} \operatorname{tg}(L+L_1) & 1 & 0 & 0 & X_1\operatorname{tg}(L+L_1)-Y_1 \\ \operatorname{tg}(L+L_2) & 1 & 0 & 0 & X_2\operatorname{tg}(L+L_2)-Y_2 \\ 0 & 0 & \operatorname{tg}(L+L'_1) & 1 & X_1\operatorname{tg}(L+L'_1)-Y_1 \\ 0 & 0 & \operatorname{tg}(L+L'_2) & 1 & X_2\operatorname{tg}(L+L'_2)-Y_2 \\ \operatorname{tg} L & 1 & -\operatorname{tg} L & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 .$$

Bien que cette équation se ramène immédiatement de la forme transcendante actuelle à la forme algébrique en tg L, sa résolution promet d'être laborieuse. Algébrique, elle sera du cinquième degré en tg L. Mais, par nature du problème, celui-ci ne comporte qu'une solution, et cette équation du cinquième degré en tg L doit avoir quatre racines imaginaires.

Indépendamment même du passage de l'équation transcendante à l'équation algébrique, nous allons voir que, en effet, le premier membre de l'équation ci-dessus est divisible par $(1+\operatorname{tg}^2 L)^2$, ou que l'équation algébrique correspondante admet les racines imaginaires $\operatorname{tg} L = +i, +i, -i, -i$.

Pour vérifier, d'abord, que le premier membre de l'équation s'annule identiquement lorsqu'on y remplace tg L par $+i$, appliquons à

$$\alpha = L_1, L_2, L'_1, L'_2,$$

respectivement dans les quatre premières lignes du déterminant premier membre, la relation

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arc}\operatorname{tg} i + \alpha) = i$$

utilisée dans les mêmes circonstances au chapitre précédent, à propos du problème des trois points.

Par la substitution $\operatorname{tg} L = i$, le premier membre de l'équation en L devient ainsi

$$\begin{vmatrix} i & 1 & 0 & 0 & iX_1-Y_1 \\ i & 1 & 0 & 0 & iX_2-Y_2 \\ 0 & 0 & i & 1 & iX_1-Y_1 \\ 0 & 0 & i & 1 & iX_2-Y_2 \\ i & 1 & -i & -1 & 0 \end{vmatrix},$$

expression identiquement nulle : ce qui vérifie que l'équation algébrique admet une première fois la racine $\operatorname{tg} L = +i$.

De même, le premier membre de l'équation en L s'annule identiquement quand on y remplace tg L par $-i$. Il suffit, pour s'en assurer, d'appliquer aux mêmes valeurs $\alpha$ que ci-

dessus, respectivement dans les quatre premières lignes du déterminant premier membre, la relation

$$\operatorname{tg}\left[\operatorname{arc\,tg}(-i)+\alpha\right]=-i$$

déjà utilisée au chapitre précédent. Cette substitution donne le déterminant

$$\begin{vmatrix} -i & 1 & 0 & 0 & -iX_1-Y_1 \\ -i & 1 & 0 & 0 & -iX_2-Y_2 \\ 0 & 0 & -i & 1 & -iX_1-Y_1 \\ 0 & 0 & -i & 1 & -iX_2-Y_2 \\ -i & 1 & i & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

identiquement nul.

Pour faire voir que l'équation en L admet une deuxième fois les racines $\operatorname{tg} L=+i$ et $-i$, montrons que $\operatorname{tg} L=+i$ et $\operatorname{tg} L=-i$ sont aussi racines de l'équation que fournit la dérivation de l'équation primitive par rapport à $\operatorname{tg} L$. Le premier membre de cette équation est la somme de trois déterminants qui s'écrivent comme le premier membre de l'équation primitive sauf que les trois colonnes du tableau suivant doivent y prendre respectivement la place des colonnes première, troisième et cinquième :

$$\left\| \begin{matrix} \dfrac{\cos^2 L}{\cos^2(L+L_1)} & 0 & X_1\dfrac{\cos^2 L}{\cos^2(L+L_1)} \\ \dfrac{\cos^2 L}{\cos^2(L+L_2)} & 0 & X_2\dfrac{\cos^2 L}{\cos^2(L+L_2)} \\ 0 & \dfrac{\cos^2 L}{\cos^2(L+L'_1)} & X_1\dfrac{\cos^2 L}{\cos^2(L+L'_1)} \\ 0 & \dfrac{\cos^2 L}{\cos^2(L+L'_2)} & X_2\dfrac{\cos^2 L}{\cos^2(L+L'_2)} \\ 1 & -1 & 0 \end{matrix} \right\|$$

Or, ce tableau peut s'écrire :

$$\left\|\begin{array}{ccc} \dfrac{1+\operatorname{tg}^2(L+L_1)}{1+\operatorname{tg}^2 L} & 0 & X_1\dfrac{1+\operatorname{tg}^2(L+L_1)}{1+\operatorname{tg}^2 L} \\ \dfrac{1+\operatorname{tg}^2(L+L_2)}{1+\operatorname{tg}^2 L} & 0 & X_2\dfrac{1+\operatorname{tg}^2(L+L_2)}{1+\operatorname{tg}^2 L} \\ 0 & \dfrac{1+\operatorname{tg}^2(L+L'_1)}{1+\operatorname{tg}^2 L} & X_1\dfrac{1+\operatorname{tg}^2(L+L'_1)}{1+\operatorname{tg}^2 L} \\ 0 & \dfrac{1+\operatorname{tg}^2(L+L'_2)}{1+\operatorname{tg}^2 L} & X_2\dfrac{1+\operatorname{tg}^2(L+L'_2)}{1+\operatorname{tg}^2 L} \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right\|$$

La multiplication des deux membres de l'équation dérivée par $(1 + \operatorname{tg}^2 L)$ consiste dans la multiplication par ce facteur d'une colonne de chacun des trois déterminants dont la somme constitue le premier membre de cette équation ; et ceci équivaut à remplacer le tableau ci-dessus par le tableau suivant :

$$\left\|\begin{array}{ccc} 1+\operatorname{tg}^2(L+L_1) & 0 & X_1[1+\operatorname{tg}^2(L+L_1)] \\ 1+\operatorname{tg}^2(L+L_2) & 0 & X_2[1+\operatorname{tg}^2(L+L_2)] \\ 0 & 1+\operatorname{tg}^2(L+L'_1) & X_1[1+\operatorname{tg}^2(L+L'_1)] \\ 0 & 1+\operatorname{tg}^2(L+L'_2) & X_2[1+\operatorname{tg}^2(L+L'_2)] \\ 1+\operatorname{tg}^2 L & -(1+\operatorname{tg}^2 L) & 0 \end{array}\right\|$$

Cette multiplication est légitime car, par elle, la substitution $\operatorname{tg} L = \pm i$ donnera un polynome entier en $i$. Or, cette substitution transforme de la manière suivante le tableau précédent :

$$\left\|\begin{array}{ccc} 1+i^2 & 0 & X_1(1+i^2) \\ 1+i^2 & 0 & X_2(1+i^2) \\ 0 & 1+i^2 & X_1(1+i^2) \\ 0 & 1+i^2 & X_2(1+i^2) \\ 1+i^2 & -(1+i^2) & 0 \end{array}\right\| ;$$

et tous les éléments de ce tableau sont identiquement nuls. Chacune des substitutions $\operatorname{tg} L = +i$ et $\operatorname{tg} L = -i$ annule donc tous les éléments d'au moins une colonne de chacun des trois déterminants dont la somme constitue le premier membre

(le second étant nul) de l'équation dérivée, et l'équation primitive admet comme racines doubles $\operatorname{tg} L = +i$ et $\operatorname{tg} L = -i$.

Le premier membre de l'équation algébrique en tg L, polynome de la forme

$$A_0 \operatorname{tg}^5 L + A_1 \operatorname{tg}^4 L + A_2 \operatorname{tg}^3 L + A_3 \operatorname{tg}^2 L + A_4 \operatorname{tg} L + A_5,$$

est donc divisible par $(\operatorname{tg}^2 L + 1)^2$, et ses coefficients sont tels que

$$A_0 = \frac{1}{2} A_2 = A_4 ,$$

$$A_1 = \frac{1}{2} A_3 = A_5 ,$$

de sorte que le quotient de cette division est

$$A_4 \operatorname{tg} L + A_5 .$$

La racine réelle de l'équation en tg L, solution du problème des deux points, est la racine de l'équation linéaire

$$A_4 \operatorname{tg} L + A_5 = 0,$$

à savoir

$$\operatorname{tg} L = - \begin{vmatrix} \operatorname{tg} L_1 & 0 & -1 & 0 & X_1 \operatorname{tg} L_1 - Y_1 \\ \operatorname{tg} L_2 & 0 & -1 & 0 & X_2 \operatorname{tg} L_2 - Y_2 \\ 0 & \operatorname{tg} L'_1 & 0 & -1 & X_1 \operatorname{tg} L'_1 - Y_1 \\ 0 & \operatorname{tg} L'_2 & 0 & -1 & X_2 \operatorname{tg} L'_2 - Y_2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & 0 & \operatorname{tg} L_1 & 0 & Y_1 \operatorname{tg} L_1 + X_1 \\ 1 & 0 & \operatorname{tg} L_2 & 0 & Y_2 \operatorname{tg} L_2 + X_2 \\ 0 & \operatorname{tg} L'_1 & 0 & -1 & Y_1 \operatorname{tg} L'_1 + X_1 \\ 0 & \operatorname{tg} L'_2 & 0 & -1 & Y_2 \operatorname{tg} L'_2 + X_2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} .$$

L'ambiguïté propre à la fonction tangente ayant été, dans chaque cas déterminé, levée sans difficulté, il suffira de remonter aux équations primitives, linéaires en X, Y, X′, Y′, pour obtenir les valeurs numériques de ces inconnues finales : les deux premières équations donneront (X,Y), les deux suivantes donneront (X′,Y′) et la cinquième sera une équation de vérification.

A ces longs calculs sont applicables les remarques qui ont été faites à propos de ceux par lesquels se résout le problème des trois points. Comme nous l'avons fait pour celui-ci, nous allons proposer une solution du problème des deux points par approximations successives.

4. *Solution par approximations successives.* — Il n'y a pas d'intérêt à faire porter la solution par approximations successives sur l'ensemble des cinq équations du problème des deux points. Ces équations sont, en effet, déjà linéaires par rapport à quatre de leurs inconnues. Il suffit de résoudre par approximations successives l'équation en L.

Soit $L_o$ une solution approchée, fournie par la méthode graphique ou par l'emploi d'une aiguille aimantée, et qu'il s'agit d'améliorer. Le fait que cette solution est approchée signifie, comme d'habitude, que la différence $\Delta L = L - L_o$ est mesurée en radians par un nombre petit, c'est-à-dire, par définition, par un nombre dont le carré est négligeable à l'approximation adoptée.

Les calculs comportent le développement en série du premier membre de l'équation en L, ou en $(L_o + \Delta L)$, suivant les puissances croissantes de $\Delta L$; cette série sera arrêtée après le terme du premier degré.

Posons

$$T_o = \begin{vmatrix} \operatorname{tg}(L_o+L_1) & 1 & 0 & 0 & X_1\operatorname{tg}(L_o+L_1)-Y_1 \\ \operatorname{tg}(L_o+L_2) & 1 & 0 & 0 & X_2\operatorname{tg}(L_o+L_2)-Y_2 \\ 0 & 0 & \operatorname{tg}(L_o+L'_1) & 1 & X_1\operatorname{tg}(L_o+L'_1)-Y_1 \\ 0 & 0 & \operatorname{tg}(L_o+L'_2) & 1 & X_2\operatorname{tg}(L_o+L'_2)-Y_2 \\ \operatorname{tg} L_o & 1 & -\operatorname{tg} L_o & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

quantité entièrement numérique et dont le calcul ne sera pas très pénible grâce à la simplicité de beaucoup de ses éléments.

La dérivée par rapport à L du premier membre de l'équation en L est la somme de trois déterminants ; nous appellerons $T_1$, $T_2$, $T_3$ les valeurs numériques que prennent ces déterminants quand on y remplace L par $L_o$ :

$$T_1 = \begin{vmatrix} \sec^2(L_o+L_1) & 1 & 0 & 0 & X_1\operatorname{tg}(L_o+L_1)-Y_1 \\ \sec^2(L_o+L_2) & 1 & 0 & 0 & X_2\operatorname{tg}(L_o+L_2)-Y_2 \\ 0 & 0 & \operatorname{tg}(L_o+L'_1) & 1 & X_1\operatorname{tg}(L_o+L'_1)-Y_1 \\ 0 & 0 & \operatorname{tg}(L_o+L'_2) & 1 & X_2\operatorname{tg}(L_o+L'_2)-Y_2 \\ \sec^2 L_o & 1 & -\operatorname{tg} L_o & -1 & 0 \end{vmatrix},$$

$$T_2 = \begin{vmatrix} \operatorname{tg}(L_o+L_1) & 1 & 0 & 0 & X_1\operatorname{tg}(L_o+L_1)-Y_1 \\ \operatorname{tg}(L_o+L_2) & 1 & 0 & 0 & X_2\operatorname{tg}(L_o+L_2)-Y_2 \\ 0 & 0 & \sec^2(L_o+L'_1) & 1 & X_1\operatorname{tg}(L_o+L'_1)-Y_1 \\ 0 & 0 & \sec^2(L_o+L'_2) & 1 & X_2\operatorname{tg}(L_o+L'_2)-Y_2 \\ \operatorname{tg} L_o & 1 & -\sec^2 L_o & -1 & 0 \end{vmatrix},$$

$$T_3 = \begin{vmatrix} \operatorname{tg}(L_0+L_1) & 1 & 0 & 0 & X_1 \sec^2(L_0+L_1) \\ \operatorname{tg}(L_0+L_2) & 1 & 0 & 0 & X_2 \sec^2(L_0+L_2) \\ 0 & 0 & \operatorname{tg}(L_0+L'_1) & 1 & X_1 \sec^2(L_0+L'_1) \\ 0 & 0 & \operatorname{tg}(L_0+L'^2) & 1 & X_2 \sec^2(L_0+L'_2) \\ \operatorname{tg} L_0 & 1 & -\operatorname{tg} L_0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

L'équation linéaire en $\Delta L$ est

$$T_0 + \Delta L\,(T_1 + T_2 + T_3) = 0$$

de sorte que

$$\Delta L = -\frac{T_0}{T_1 + T_2 + T_3} \text{ rad.}$$

c'est-à-dire

$$\Delta L = -\frac{180}{\pi}\frac{T_0}{T_1+T_2+T_3} \text{ degrés} = -\frac{200}{\pi}\frac{T_0}{T_1+T_2+T_3} \text{ grades.}$$

5. *Essai de résolution du problème des deux points au moyen d'une seule station.* — Ce titre semble annoncer une solution beaucoup plus simple du problème des deux points. Cette solution n'est cependant présentée que sous la réserve suivante : elle va supposer connues non seulement les coordonnées planimétriques, mais aussi les cotes des points observés ; elle ne sera donc généralement pas applicable au rattachement du lever à des axes définis géographiquement, opération dans laquelle les points observés sont des points géodésiques dont chacun n'est connu que par la verticale à laquelle il appartient.

Cette solution s'appliquera plutôt dans les mêmes circonstances que la triangulation. Elle n'est du reste, au fond, qu'une extension du problème II du chapitre consacré ci-dessus à la triangulation, extension qui consisterait en ce que la connaissance d'un azimut issu du point de station serait supprimée des données de ce problème.

L'énoncé du problème des deux points sous cette forme nouvelle est le suivant, avec, comme d'habitude, le mot *point* mis, sans inconvénient pratique, à la place du mot *verticale* : on donne les coordonnées $(X_1, Y_1, Z_1)$, $(X_2, Y_2, Z_2)$ de deux points $P_1$, $P_2$ accessibles à la mire; on demande les coordonnées $(X, Y, Z)$ d'un point P accessible au théodolite et d'où les deux premiers sont visibles.

On installe le théodolite au point P, avec une orientation

quelconque de son cercle horizontal; soit I la hauteur du centre de l'instrument. Des visées sur la mire placée en $P_1$, puis sur la mire placée en $P_2$ donnent : les lectures $L_1$, $L_2$ sur le cercle horizontal, les lectures $l_1$, $l_2$ sur le cercle vertical. Enfin, soient $M_1$, $M_2$ les deux hauteurs de mire, lectures sur celle-ci, ou hauteur de son voyant.

L'erreur du zéro du cercle vertical a été annulée: pour fixer les idées, nous supposerons ce cercle gradué de manière à donner l'angle de pente de la ligne de visée : $l_1 = p_1$, $l_2 = p_2$, angles de pente des deux lignes de visée.

La collimation a été annulée.

Chacune des deux lignes de visée est représentée par deux équations auxquelles satisfont les coordonnées du centre de l'instrument. En exprimant ceci, on écrit un système de quatre équations aux quatre inconnues X, Y, Z et L, L étant l'erreur d'orientation du cercle horizontal.

6. *Solution graphique.* — Le point visé sur la mire en $P_1$ a les coordonnées $(X_1, Y_1, Z_1 + M_1)$, et la première ligne de visée appartient au cône $C_1$ ayant ce point pour sommet, de révolution autour de la verticale de ce point, et dont les génératrices ont l'angle de pente $p_1$.

De même, le point visé sur la mire en $P_2$ a les coordonnées $(X_2, Y_2, Z_2 + M_2)$, et la deuxième ligne de visée appartient au cône $C_2$ ayant ce point pour sommet, de révolution autour de la verticale de ce point, et dont les génératrices ont l'angle de pente $p_2$.

Le centre de l'instrument appartient donc à la ligne d'intersection de ces deux cônes. Pratiquement, chacun de ces cônes pourra se réduire à l'une de ses deux nappes, et les circonstances de l'observation feront connaître sans ambiguïté quelle nappe de chaque cône il faut conserver.

D'autre part, la projection horizontale du point de station appartient à l'arc de circonférence limité aux points $P_1$ et $P_2$, et capable de l'angle $(L_2 - L_1)$. En d'autres termes, eu égard à l'hypothèse simplificatrice qui définit la Topographie vis-à-vis de la Géodésie, la verticale du point de station appartient à la surface cylindrique S dont les génératrices sont verticales et qui a cet arc de circonférence pour directrice.

Finalement, le centre de l'instrument est le point commun à la surface cylindrique S et à la ligne d'intersection des cônes

$C_1$ et $C_2$ réduits à leurs nappes utiles. Une épure de Géométrie descriptive, de préférence en projection cotée, permettra la détermination par points de cette ligne d'intersection, puis, en projection horizontale, et avec sa cote, le point représentatif du centre de l'instrument (fig. 13).

Dans la pratique, il arrivera souvent que cette cote ne sera pas demandée : il suffira alors de s'occuper de la projection horizontale de la ligne d'intersection des cônes $C_1$ et $C_2$.

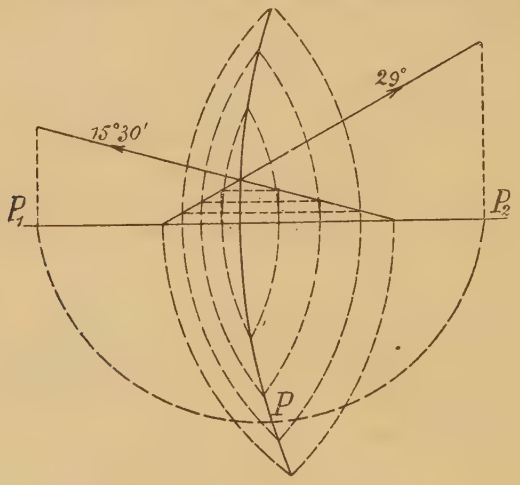



Fig. 13.

7. *Solution analytique.* — Les quatre équations aux inconnues (X, Y, Z, L) sont

$$\frac{X - X_1}{\cos(L + L_1)} = \frac{Y - Y_1}{\sin(L + L_1)} = \frac{(Z + l) - (Z_1 + M_1)}{\operatorname{tg} p_1},$$

$$\frac{X - X_2}{\cos(L + L_2)} = \frac{Y - Y_2}{\sin(L + L_2)} = \frac{(Z + l) - (Z_2 + M_2)}{\operatorname{tg} p_2},$$

système linéaire en (X, Y, Z), transcendant en L, rendu facilement algébrique en tg L. L'élimination de (X, Y, Z) laisse l'équation en L

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cos(L + L_1) & 0 & X_1 \\ 0 & 1 & 0 & \sin(L + L_1) & 0 & Y_1 \\ 0 & 0 & 1 & \operatorname{tg} p_1 & 0 & Z_1 + M_1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cos(L + L_2) & X_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \sin(L + L_2) & Y_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \operatorname{tg} p_2 & Z_2 + M_2 \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$\begin{vmatrix} \cos(L+L_1) & \cos(L+L_2) & X_2 - X_1 \\ \sin(L+L_1) & \sin(L+L_2) & Y_2 - Y_1 \\ \operatorname{tg} p_1 & \operatorname{tg} p_2 & (Z_2+M_2) - (Z_1+M_1) \end{vmatrix} = 0.$$

Cette équation peut se résoudre de la manière suivante. Si l'on introduit successivement des quantités A, $\alpha$, B, $\beta$ définies sans ambiguïté (si l'on ajoute que A et B sont positifs) par les égalités

$$\begin{aligned} A\cos\alpha &= X_2 - X_1 , \\ A\sin\alpha &= Y_2 - Y_1 , \\ B\cos\beta &= \operatorname{tg} p_1 \cos(L_2-\alpha) - \operatorname{tg} p_2 \cos(L_1-\alpha) , \\ B\sin\beta &= \operatorname{tg} p_1 \sin(L_2-\alpha) - \operatorname{tg} p_2 \sin(L_1-\alpha) , \end{aligned}$$

l'inconnue L est donnée par

$$L = -\beta + \arcsin \frac{[(Z_2+M_2) - (Z_1+M_1)]\sin(L_2-L_1)}{AB} .$$

Quant aux autres inconnues (X, Y, Z),

$$X = \frac{X_1 \operatorname{tg} p_1 \cos(L+L_2) - X_2 \operatorname{tg} p_2 \cos(L+L_1)}{\operatorname{tg} p_1 \cos(L+L_2) - \operatorname{tg} p_2 \cos(L+L_1)} ,$$

$$Y = \frac{Y_1 \operatorname{tg} p_1 \sin(L+L_1) - Y_2 \operatorname{tg} p_2 \sin(L+L_2)}{\operatorname{tg} p_1 \sin(L+L_2) - \operatorname{tg} p_2 \sin(L+L_1)} ,$$

et Z s'obtiendra par l'un des quatre calculs

$$Z = Z_1 + \operatorname{tg} p_1 \left[ \frac{X-X_1}{\cos(L+L_1)} \text{ ou } \frac{Y-Y_1}{\sin(L+L_1)} \right] + (M_1 - I) ,$$

$$Z = Z_2 + \operatorname{tg} p_2 \left[ \frac{X-X_2}{\cos(L+L_2)} \text{ ou } \frac{Y-Y_2}{\sin(L+L_2)} \right] + (M_2 - I) ,$$

dont on effectuera au moins deux pour se ménager une vérification.

8. *Approximations successives.*— Si l'on trouve pénibles les calculs précédents, on pourra procéder par approximations successives, particulièrement en ce qui concerne le calcul de L.

Soit $L_0$ une valeur approchée de L fournie par la résolution graphique du problème ou par l'observation de l'aiguille aimantée. La différence $\Delta L = L - L_0$, exprimée avec le radian pour unité, est une quantité dont le carré est, par hypothèse, négligeable. Comme d'habitude en pareilles cir-

constances, la correction $\Delta L$ de deuxième approximation se tirera de l'équation linéaire déduite de l'équation exacte par un développement de Taylor en $\Delta L$ limité au terme du premier degré.

En posant

$$T_0 = \begin{vmatrix} \cos(L_0+L_1) & \cos(L_0+L_2) & X_2-X_1 \\ \sin(L_0+L_1) & \sin(L_0+L_2) & Y_2-Y_1 \\ \operatorname{tg} p_1 & \operatorname{tg} p_2 & (Z_2+M_2)-(Z_1+M_1) \end{vmatrix},$$

$$T_1 = \begin{vmatrix} -\sin(L_0+L_1) & \cos(L_0+L_2) & X_2-X_1 \\ \cos(L_0+L_1) & \sin(L_0+L_2) & Y_2-Y_1 \\ 0 & \operatorname{tg} p_2 & (Z_2+M_2)-(Z_1+M_1) \end{vmatrix},$$

$$T_2 = \begin{vmatrix} \cos(L_0+L_1) & -\sin(L_0+L_2) & X_2-X_1 \\ \sin(L_0+L_1) & \cos(L_0+L_2) & Y_2-Y_1 \\ \operatorname{tg} p_1 & 0 & (Z_2+M_2)-(Z_1+M_1) \end{vmatrix},$$

on obtiendra

$$\Delta L = -\frac{T_0}{T_1 + T_2}.$$

Le calcul de $T_0$, $T_1$, $T_2$ sera facilité par l'introduction de quantités auxiliaires d'une manière analogue à ce qui a été fait dans la résolution de l'équation exacte en L.

9. *Correction de courbure de la Terre et de réfraction.* — L'attention a déjà été attirée sur le fait que la définition des points géodésiques ne comporte généralement pas la connaissance de leurs cotes, et une remarque a été faite à ce sujet sur les circonstances dans lesquelles est applicable le problème actuel. Une autre remarque doit être faite. La considération de l'altitude introduit la difficulté relative à la courbure de la Terre. On sait, en effet, que l'hypothèse topographique du parallélisme des verticales entraîne rapidement, pour des verticales quelque peu distantes l'une de l'autre, des erreurs qui ne seraient tolérables qu'à une bien grossière approximation. De même, et liée à la première, apparaît la difficulté relative à la réfraction atmosphérique.

Dans une étude purement théorique, il y aurait lieu de chercher séparément les termes correctifs correspondants à ces deux causes d'erreur. En ce qui concerne, d'abord, la courbure de la Terre, il ne s'agirait plus de coordonnées topographiques

(X, Y, Z), mais de coordonnées géographiques : longitude $\lambda$, latitude $\varphi$, altitude $h$. Le problème devrait se poser autrement : on donne les coordonnées géographiques $(\lambda_1, \varphi_1, h_1)$ et $(\lambda_2, \varphi_2, h_2)$ de deux points $P_1$ et $P_2$ accessibles à la mire ; on demande les coordonnées $(\lambda, \varphi, h)$ d'un point P accessible au théodolite et d'où sont visibles les deux premiers.

Il ne semble pas que ce soit, dans cette étude, le lieu d'aborder le problème sous cette forme, et on se contentera de proposer la solution simplifiée suivante.

Si $D_1$ est la distance horizontale du point P au point $P_1$,

$$D_1 = -\frac{X - X_1}{\cos (L + L_1)} \qquad \text{ou} \qquad -\frac{Y - Y_1}{\sin (L + L_1)}$$

et

$$D_1^2 = (X - X_1)^2 + (Y - Y_1)^2.$$

Abstraction faite des termes correctifs demandés,

$$Z = Z_1 - D_1 \operatorname{tg} p_1 + (M_1 - I);$$

et nous savons que la correction de courbure de la Terre et de la réfraction consiste à introduire un terme tel que

$$Z = Z_1 - D_1 \operatorname{tg} p_1 + \frac{D_1^2}{2R} \frac{3{,}32 - \cos 2 p_1}{1 + \cos 2 p_1} + (M_1 - I).$$

De même, à propos de la deuxième visée,

$$Z = Z_2 - D_2 \operatorname{tg} p_2 + \frac{D_2^2}{2R} \frac{3{,}32 - \cos 2 p_2}{1 + \cos 2 p_2} + (M_2 - I),$$

où

$$D_2^2 = (X - X_2)^2 + (Y - Y_2)^2.$$

Les deux doubles équations des lignes de visée doivent donc être modifiées de façon que leurs troisièmes membres s'écrivent

$$\left[(Z + I) - (Z_1 + M_1) - \frac{D_1^2}{2R} \frac{3{,}32 - \cos 2 p_1}{1 + \cos 2 p_1}\right] : \operatorname{tg} p_1,$$

$$\left[(Z + I) - (Z_2 + M_2) - \frac{D_2^2}{2R} \frac{3{,}32 - \cos 2 p_2}{1 + \cos 2 p_2}\right] : \operatorname{tg} p_2.$$

A cause de la manière dont $D_1$ et $D_2$ sont des fonctions de (X, Y), les équations des lignes de visée cessent d'être linéaires, et l'élimination de (X, Y, Z) en vue d'une équation en L ne se fait plus avec la même facilité.

Le mieux sera de procéder par approximations successives,

avec, en première approximation, le calcul de (X, Y, Z) comme s'il n'y avait ni courbure de la Terre, ni réfraction atmosphérique. Si $(X_0, Y_0, Z_0)$ sont les résultats de ce premier calcul, la deuxième approximation consistera à poser

$$D_1^2 = (X_0 - X_1)^2 + (Y_0 - Y_1)^2,$$
$$D_2^2 = (X_0 - X_2)^2 + (Y_0 - Y_2)^2,$$

et à recommencer les mêmes calculs comme si les hauteurs de mire $M_1$ et $M_2$ étaient devenues, respectivement,

$$M_1 + \frac{D_1^2}{2R}\,\frac{3,32 - \cos 2p_1}{1 + \cos 2p_1},$$
$$M_2 + \frac{D_2^2}{2R}\,\frac{3,32 - \cos 2p_2}{1 + \cos 2p_2}.$$

## CHAPITRE V.

### Méthode du point approché.

1. *Méthode de Hatt ou du point approché.* — En 1890, P. Hatt, ingénieur hydrographe en chef de la Marine française, a publié, aux *Comptes Rendus des séances de l'Académie des Sciences de Paris*, une note intitulée « Sur la détermination d'un point » (t. CX, p. 1027). Cette note manque de clarté. Elle a pour objet, à l'approximation topographique, le calcul des coordonnées planimétriques du point de station, eu égard à l'observation de points connus dont le nombre est supérieur à trois.

La résolution de pareil problème ne demande guère, a priori, de considérations nouvelles; elle résulte des principes généraux de la Théorie des erreurs.

Soient $(X_1, Y_1)$, $(X_2, Y_2)$, . . . $(X_n, Y_n)$ les coordonnées planimétriques des points visés, au nombre de $n$, $P_1$, $P_2$, . . . $P_n$ ; (X, Y) les coordonnées inconnues du point de station ; $L_1$, $L_2$, . . . $L_n$ les lectures faites dans les diverses visées, au cercle horizontal du théodolite, moyennant une orientation quelconque de ce cercle, décalée d'un angle inconnu L par rapport aux axes topographiques.

Les projections horizontales des lignes de visée ont des équations qui sont satisfaites par les coordonnées planimétriques du point de station :

$$Y - Y_1 - \operatorname{tg}(L+L_1)(X-X_1) = 0,$$
$$Y - Y_2 - \operatorname{tg}(L+L_2)(X-X_2) = 0,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$Y - Y_n - \operatorname{tg}(L+L_n)(X-X_n) = 0.$$

L'inexactitude de l'hypothèse topographique et les erreurs inévitables d'observation empêchent la compatibilité de ce système de $n$ équations aux trois inconnues (X, Y, L).

La résolution du système formé par trois quelconques de ces équations, ou, de préférence, le procédé graphique, fournit la valeur approchée $L_o$ de L et les valeurs approchées $X_o$, $Y_o$ de X, Y. Soient

$$\Delta X = X - X_o,$$
$$\Delta Y = Y - Y_o,$$
$$\Delta L = L - L_o.$$

Chacun des facteurs $\operatorname{tg}(L+L_i)$ ou $\operatorname{tg}(L_o+L_i+\Delta L)$ peut se remplacer par son développement en série suivant les puissances de $\Delta L$ et limité au terme du premier degré, les puissances supérieures de $\Delta L$ étant, par hypothèse, négligeables :

$$\operatorname{tg}(L_o+L_i+\Delta L) = \operatorname{tg}(L_o+L_i) + \Delta L \sec^2(L_o+L_i).$$

De plus, la substitution de $(X_o+\Delta X)$ et de $(Y_o+\Delta Y)$ à X et à Y, et la suppression, légitime à l'approximation actuelle, des termes en $\Delta X \cdot \Delta L$ transforment le système primitif, transcendant, dans le système

$$\Delta X \operatorname{tg}(L_o+L_1) - \Delta Y + \Delta L (X_o - X_1) \sec^2(L_o+L_1) = Y_o - Y_1 - (X_o - X_1) \operatorname{tg}(L_o+L_1),$$
$$\Delta X \operatorname{tg}(L_o+L_2) - \Delta Y + \Delta L (X_o - X_2) \sec^2(L_o+L_2) = Y_o - Y_2 - (X_o - X_2) \operatorname{tg}(L_o+L_2),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\Delta X \operatorname{tg}(L_o+L_n) - \Delta Y + \Delta L (X_o - X_n) \sec^2(L_o+L_n) = Y_o - Y_n - (X_o - X_n) \operatorname{tg}(L_o+L_n),$$

linéaire en $\Delta X$, $\Delta Y$, $\Delta L$, et auquel sont applicables, par conséquent, les méthodes de la Théorie des erreurs.

On peut très bien comprendre, cependant, que les praticiens désirent parfois éviter les très longs calculs qu'exigent les méthodes raisonnées de la Théorie des erreurs, et qu'ils aient recours, dans certaines circonstances, à des méthodes empiriques.

La création du procédé de P. Hatt et son adoption par la marine française semblent indiquer que les levers topographiques comportent de pareilles circonstances.

Le *Manuel de l'officier orienteur d'artillerie* (armée française) consacre quelques pages à l'exposé de la méthode de Hatt, dite aussi du point approché. M. E. Balu, géomètre-

topographe, a trouvé cet exposé trop sommaire et a publié, en 1919, un petit livre sur la même méthode (1). Cet ouvrage sera utile aux praticiens qui auront accepté les formules par lesquelles se termine sa partie théorique, mais cette partie théorique renferme des erreurs de raisonnement mathématique, et il y a lieu de reprendre la méthode de Hatt pour l'étudier suivant les principes très simples et très peu nombreux sur lesquels s'appuie la résolution de tout problème de mathématiques appliquées.

2. *Énoncé.* — La seule difficulté consiste dans la rédaction de l'énoncé du problème. Une étude attentive des pièces qui viennent d'être citées, et dans lesquelles, comme il arrive souvent, l'énoncé ne se trouve pas, montre que celui-ci peut être rédigé de la façon suivante.

A chacune des combinaisons deux à deux des points visés correspond (en projection horizontale) un lieu géométrique du point de station : dans la solution graphique par segments capables, chacun de ces lieux est un arc de circonférence. Si l'hypothèse topographique des verticales parallèles était vraie, et si les erreurs d'observation n'existaient pas, ces lieux géométriques passeraient tous par un même point, le point de station demandé. Dans la réalité, ces lieux se coupent deux-à-deux en des points distincts.

Dans la portion du plan horizontal où se groupent ces points, on adopte, en première approximation, pour le point de station, le point dans le voisinage duquel on estime que les points d'intersection des lieux géométriques sont les plus serrés. Il s'agit maintenant de choisir le point le plus avantageux de deuxième approximation.

La définition du point le plus avantageux consistera précisément dans la méthode que l'on emploiera pour le déterminer. On a montré tantôt que le problème se prête à l'application des méthodes raisonnées de la Théorie des erreurs : si la méthode adoptée est la méthode la plus approximative ou celle de l'approximation minimum, le point le plus avantageux sera, par définition, le point aux coordonnées duquel corres-

(1) *Géodésie topométrique*, troisième fascicule : *Détermination du point par relèvement*, méthode du service hydrographique de la marine..., Paris, Gauthier-Villars, 1919.

pond la moindre approximation, et ce sera, par définition, le point dont les coordonnées sont les plus probables si, admettant la loi exponentielle de probabilité des erreurs, on fait choix de la méthode des moindres carrés.

La méthode de Hatt consiste à faire correspondre au point de première approximation et à chacune des combinaisons deux-à-deux des points visés, un lieu géométrique, rectiligne, du point de station en deuxième approximation. Elle admet que ces lieux de deuxième approximation, qui vont être définis, se couperont deux à-deux en une région du plan sensiblement plus restreinte que les lieux de première approximation.

Considérons donc (fig. 14), en projection horizontale, deux

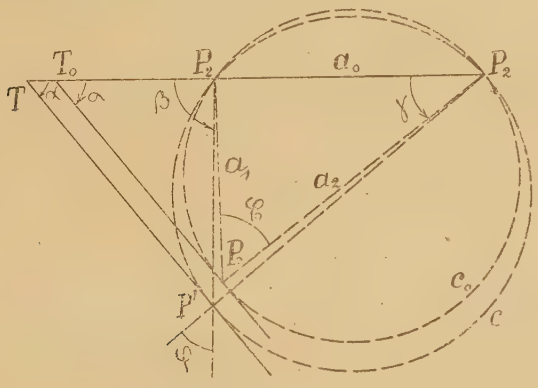



Fig. 14.

points visés quelconques, $P_1$ et $P_2$, et, en $P_0$, le point de station de première approximation, ou point approché. Appelons $c_0$ la circonférence passant par les points $P_1$, $P_2$, $P_0$, et $c$ la circonférence qui, passant par le point vrai de station P, renferme le segment appuyé sur $P_1P_2$ et capable de l'angle observé $\varphi = P_1 P P_2$.

Par le point approché $P_0$ menons la tangente $t_0$ à la circonférence $c_0$ ; nous pouvons toujours avoir attribué la dénomination $P_1$ à celui des points $P_1$, $P_2$ qui est le plus rapproché du point d'intersection $T_0$ des droites $t_0$ et $P_1P_2$, sous réserve d'examiner ultérieurement ce que cette hypothèse pourrait imposer de particulier aux formules finales.

La circonférence $c$ admet deux tangentes parallèles à $t_0$ ; ces tangentes coupent la droite $P_1P_2$ en des points situés de

part et d'autre de $P_1$ ; soit $t$ celle de ces deux tangentes qui coupe $P_1P_2$ du même côté que $t_0$ par rapport à $P_1$ ; les angles $\varphi$ et $P_1P_0P_2$ étant voisins, c'est sûrement, de ces deux tangentes, la droite $t$ qui est la plus rapprochée de $t_0$.

Par définition, la méthode de Hatt consiste à adopter la tangente $t$ comme lieu géométrique de deuxième approximation du point de station.

Le point approché $P_0$ ayant été choisi, on connaît, par exemple par des mesures faites sur le dessin, les distances deux à deux des points $P_1$, $P_0$, $P_2$, à savoir

$$a_0 = P_1P_2, \quad a_1 = P_2P_0, \quad a_2 = P_0P_1.$$

On connaît aussi l'angle $\varphi_0 = P_1P_0P_2$, valeur approchée de la différence $\varphi = P_1PP_2$ des lectures sur le cercle horizontal du théodolite. Soit encore $\alpha$ l'angle aigu suivant lequel la droite $t_0$ rencontre la droite $P_1P_2$. Enfin, appelons $\delta_0$ la distance du point $P_1$ à la droite $t_0$ : cette distance se mesure sur le dessin.

Dès lors, l'énoneé du problème se réduit aux termes que voici :

1° Énoncé provisoire : on donne les distances $a_0$ et $\delta_0$, les angles $\varphi_0$ et $\alpha$, ainsi que la variation $(\varphi - \varphi_0)$ que prend l'angle $\varphi$ dans le passage de la circonférence $c_0$ à la circonférence $c$ ; on demande la distance $\delta$ du point $P_1$ à la droite $t$, lieu géométrique de deuxième approximation.

2° Énoncé définitif : on donne les distances $a_0$, $a_1$, $a_2$ et $\delta_0$, ainsi que la différence angulaire $(\varphi - \varphi_0)$ ; on demande la distance $\delta$, objet de l'énoncé précédent.

3. *Problème provisoire.* — Par les points $P_1$ et $P_2$ faisons passer l'une des deux circonférences auxquelles appartiennent les segments capables de l'angle observé $\varphi$. Le point de station P appartient à celle de ces deux circonférences qui a été appelée $c$. Soit P′ le point de contact de la tangente $t$ parallèle à la droite $t_0$ tangente en $P_0$ à la circonférence $c_0$. Soient encore T et $T_0$ les intersections de la droite $P_1P_2$ avec les tangentes $t$ et $t_0$ respectivement, $\beta$ l'angle $TP_1P'$, et $\gamma$ l'angle $TP_2P'$.

On a les égalités

$$\frac{TP'}{\sin\beta} = \frac{TP_1}{\sin(\alpha+\beta)},$$

$$\frac{TP'}{\sin\gamma} = \frac{TP_2}{\sin(\alpha+\gamma)},$$

$$\varphi = \beta - \gamma,$$

$$TP_1 \cdot TP_2 = \overline{TP'}^2.$$

L'élimination de TP, $\beta$ et $\gamma$ entre ces quatre égalités laissera une relation entre les inconnues $TP_1$, $TP_2$, dont on sait que la différence vaut $P_1P_2$ ou $a_0$.

Les deux premières de ces égalités donnent

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{TP' \cdot \sin\alpha}{TP_1 - TP' \cdot \cos\alpha},$$

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{TP' \cdot \sin\alpha}{TP_2 - TP' \cdot \cos\alpha},$$

d'où, par la troisième, et eu égard à la quatrième,

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{a_0 \sin\alpha}{2TP' - (TP_1 + TP_2)\cos\alpha}.$$

Cette équation, rendue entière et élevée au carré, permet, par la quatrième des équations primitives, l'élimination de TP'. Mais il est plus rapide d'en tirer la somme

$$TP_2 + TP_1 = \frac{2TP' \cdot \operatorname{tg}\varphi - a_0 \sin\alpha}{\cos\alpha \operatorname{tg}\varphi}$$

et de la rapprocher de la différence

$$TP_2 - TP_1 = a_0,$$

d'où, par soustraction, puis par addition,

$$TP_1 = \frac{2TP' \cdot \sin\varphi - a_0 \sin(\alpha + \varphi)}{2\cos\alpha \sin\varphi},$$

$$TP_2 = \frac{2TP' \cdot \sin\varphi - a_0 \sin(\alpha - \varphi)}{2\cos\alpha \sin\varphi}.$$

Le produit des deux seconds membres vaut $\overline{TP'}^2$, d'où l'équation du second degré en TP'

$$8\sin^2\varphi \sin^2\alpha \,\overline{TP'}^2 - 4a_0 \sin 2\varphi \sin\alpha \cdot TP' - a_0^2(\cos 2\alpha - \cos 2\varphi) = 0,$$

et, par la résolution de celle-ci,

$$TP' = a_0 \frac{\cos\varphi + \cos\alpha}{2\sin\alpha \sin\varphi},$$

la racine adoptée étant celle qui ne s'annule pas quand $\alpha = \varphi$.

Il en résulte que

$$TP_1 = \frac{a_0}{2} \frac{1 + \cos(\alpha + \varphi)}{\sin\alpha \sin\varphi};$$

$\delta$ est la distance du point $P_1$ à la tangente $t$ :

$$\delta = TP_1 \sin\alpha = \frac{a_0}{2} \frac{1 + \cos(\alpha + \varphi)}{\sin\varphi} = \frac{a_0}{\sin\varphi} \cos^2\frac{\alpha + \varphi}{2}.$$

Lorsque l'angle $\varphi$ prend la valeur approchée $\varphi_0$, $\delta$ vaut

$$\delta_0 = \frac{a_0}{\sin \varphi_0} \cos^2 \frac{\alpha + \varphi_0}{2} .$$

$\delta$ est une fonction de $(\varphi - \varphi_0)$, et cette différence, mesurée en radians, s'exprime par un nombre dont le carré est, par hypothèse, négligeable. Le développement de $\delta$ suivant les puissances croissantes de $(\varphi - \varphi_0)$ peut, à l'approximation actuelle, être arrêté au terme linéaire :

$$\delta = \delta_0 + \left(\frac{d\delta}{d\varphi}\right)_0 (\varphi - \varphi_0)$$

où

$$\left(\frac{d\delta}{d\varphi}\right)_0 = - a_0 \frac{\cos\left(\frac{\alpha + \varphi_0}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha - \varphi_0}{2}\right)}{\sin^2 (\varphi - \varphi_0)} .$$

Le déplacement demandé de la tangente, parallèlement à elle-même, de $t_0$ à $t$, en fonction de $\alpha$, $\varphi_0$, $\varphi - \varphi_0$, est donc

$$- a_0 \frac{\cos\left(\frac{\alpha + \varphi_0}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha - \varphi_0}{2}\right)}{\sin^2 (\varphi - \varphi_0)} (\varphi - \varphi_0). \quad (1)$$

1) Au calcul trigonométrique de $\delta$, comme ci-dessus, on pourra préférer l'emploi de la Géométrie analytique. Adoptons des axes auxiliaires $(\xi\eta)$ dont la droite $P_1 P_2$ soit l'axe des $\xi$, dirigé positivement de façon que $P_1$ ait une abscisse moindre que $P_2$, avec l'origine au milieu du segment $P_1 P_2$ (figure 15), et dirigeons positivement l'axe des $\eta$ dans le demi-plan auquel appartient le point $P_0$. Le segment circulaire appuyé sur $P_1 P_2$ et capable de l'angle $\varphi_0$ appartient à la circonférence qui a pour centre le point

$$\left(0, \frac{a_0}{2 \operatorname{tg} \varphi_0}\right)$$

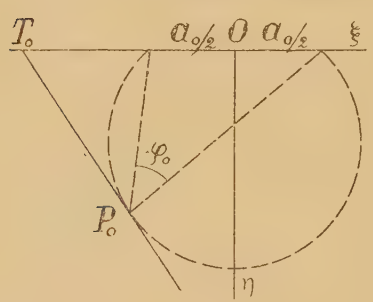



Fig. 15.

et pour rayon $\frac{a_0}{2 \sin \varphi_0}$ ; l'équation de cette circonférence est

$$\xi^2 + \eta^2 - a_0 \operatorname{cotg} \varphi_0 \, \eta - \frac{a_0^2}{4} = 0.$$

Eu égard à la signification de $\alpha$, la tangente $t_0$ a une équation de la forme

$$\eta = \xi \operatorname{tg} \alpha + k$$

4. *Problème définitif.* — A partir de cette réponse au problème provisoire, c'est l'énoncé définitif qui sera satisfait lorsque nous aurons éliminé $\alpha$ et $\varphi_0$ au profit de $a_1$ et de $a_2$.

Or, dans le triangle $P_1P_2P_0$,

$$\frac{a_1}{\cos\left(\frac{\alpha - \varphi_0}{2}\right)} = \frac{a_2}{\cos\left(\frac{\alpha + \varphi_0}{2}\right)} = \frac{a_0}{\sin \varphi_0},$$

de sorte que

$$\delta = \delta_0 - \frac{a_1 a_2}{a_0} (\varphi - \varphi_0),$$

formule de la méthode de Hatt. On voit sa symétrie en $a_1$, $a_2$, de sorte que ce résultat reste valable quel que soit le point $P_1$ ou $P_2$ à partir duquel sont mesurées les distances à la tangente $t_0$, et quel que soit le sens dans lequel, des points $P_1, P_2$, on voit cette tangente couper la droite $P_1P_2$. Enfin, à un accroissement de l'angle $\varphi_0$ correspond une diminution de la distance $\delta$ et, dans le calcul du coefficient $-\frac{a_1 a_2}{a_0}$, les longueurs des côtés du triangle $P_0P_1P_2$ s'introduisent sans qu'on doive avoir égard à leur signe.

avec $k$ satisfaisant à la condition de contact

$$(2k - a_0 \operatorname{cotg} \varphi_0)^2 \sin^2 \alpha - (4k^2 - 4 a_0 k \operatorname{cotg} \varphi_0 - a_0^2) = 0$$

qui donne les deux racines

$$k = \frac{a_0}{2 \sin \varphi_0} (\cos \varphi_0 \pm \operatorname{séc} \alpha).$$

Les équations des deux tangentes possibles $t_0$ sont

$$\eta = \xi \operatorname{tg} \alpha + \frac{a_0}{2 \sin \varphi_0} (\cos \varphi_0 \pm \operatorname{séc} \alpha)$$

desquelles la tangente $t_0$, qui coupe l'axe des $\xi$ au point de moindre abscisse, est celle qui correspond au signe supérieur. La distance $\delta_0$ du point $P_1$ à cette droite est

$$\delta_0 = \frac{a_0}{2} \frac{\cos(\alpha + \varphi_0) + 1}{\sin \varphi_0} = \frac{a_0}{\sin \varphi_0} \cos^2\left(\frac{\alpha + \varphi_0}{2}\right).$$

Aux termes petits de second ordre près,

$$\delta = \delta_0 + \frac{d\delta_0}{d\varphi_0} (\varphi - \varphi_0).$$

d'où le résultat du texte.

Il ne faut pas oublier que l'angle $(\varphi - \varphi_0)$ est exprimé en radians. Si on le mesure en degrés

$$\delta = \delta_0 - \frac{a_1 a_2}{a_0} \frac{180}{\pi} (\varphi - \varphi_0),$$

et en grades

$$\delta = \delta_0 - \frac{a_1 a_2}{a_0} \frac{200}{\pi} (\varphi - \varphi_0);$$

on gardera la même approximation et on évitera ces distinctions en écrivant

$$\delta = \delta_0 - \frac{a_1 a_2}{a_0} \sin (\varphi - \varphi_0).$$

Telle est la formule par laquelle on sait de quelle quantité il faut déplacer parallèlement à elle-même la tangente au lieu de première approximation pour que cette droite devienne le lieu de deuxième approximation.

L'ouvrage de M. Balu signalé plus haut renferme toutes les considérations utiles à l'application de cette formule. Encore qu'elles eussent pu être systématisées davantage, ces considérations sont présentées d'une manière avantageuse pour le praticien, et les canevas de calculs par lesquels la méthode est mise en œuvre sont ingénieusement dressés.

La formule qui vient d'être démontrée fait connaître la distance de la droite de deuxième approximation à l'un des points visés. Contrairement à ce que l'on semble croire, un croquis n'est pas nécessaire à fixer l'orientation de cette droite : son orientation, qui est celle de la tangente à la circonférence de première approximation, se déterminera sans ambiguïté par la proposition suivante.

Lorsque les côtés d'un quadrilatère inscriptible convexe sont orientés de façon que le tour du quadrilatère comporte le parcours d'un nombre pair de côtés orientés dans le même sens, la somme des azimuts de deux côtés non consécutifs est égale à la somme des azimuts des deux autres côtés augmentée de deux angles droits (1).

(1) Soient $a$, $b$, $c$, $d$ (fig. 16) les côtés consécutifs d'un quadrilatère inscrit convexe. Supposons d'abord ces quatre côtés orientés dans le même sens dans le parcours du quadrilatère. L'angle dont le sommet appartient à $a$ et à $b$ et celui

Comme toute égalité relative à des angles, celle qu'exprime cette proposition n'est vraie qu'à un multiple entier de quatre angles droits près.

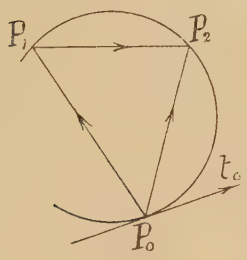


Fig. 17.

La tangente $t_0$ à la circonférence $c_0$ en l'un des sommets $P_0$ du triangle inscrit $P_0\ P_1\ P_2$, et les trois côtés de ce triangle ont les orientations d'un quadrilatère convexe inscriptible. Par conséquent (fig. 17).

$$\text{az. } t_0 = \text{az. } P_0\ P_1 + \text{az. } P_0\ P_2 - \text{az. } P_1\ P_2 + 2 \text{ droits.}$$

La droite $t_0$ ne nous intéressant que par sa direction, non par son sens, on ne risque aucune erreur à négliger les deux droits du second membre :

$$\text{az. } t_0 = \text{az. } P_0\ P_1 + \text{az. } P_0\ P_2 - \text{az. } P_1\ P_2.$$

5. *Justification intuitive de la méthode de Hatt.* — Pour justifier la méthode de Hatt, il faut démontrer ceci : si l'on considère comme petite du premier ordre la distance du point approché $P_0$ au point exact P, c'est aux quantités petites du deuxième ordre près que ce point P appartient à la droite $t$ dite de deuxième approximation.

dont le sommet appartient à $c$ et à $d$ ont pour somme deux droits, à un nombre pair de fois deux droits près :

$$2^d - (ab) + 2^d - (cd) = 2^d + k.\ 2^d,$$

$$(ab) + (cd) = 2^d + k.\ 2^d,$$

$$\text{az. } b - \text{az. } a + \text{az. } d - \text{az. } c = 2^d + k.\ 2^d,$$

$$\text{az. } b + \text{az. } d = \text{az. } a + \text{az. } c + 2^d + k.\ 2^d.$$

Changer le sens d'un côté $b$ équivaut à remplacer az. $b$ par az. $b - 2^d$.

Si l'on change les sens de deux côtés non consécutifs $b$ et $d$ :

$$\text{az. } b - 2^d + \text{az. } d - 2^d = \text{az. } a + \text{az. } c + 2^d + k.\ 2^d,$$

$$\text{az. } b + \text{az. } d = \text{az. } a + \text{az. } c + 2^d + k.2^d.$$

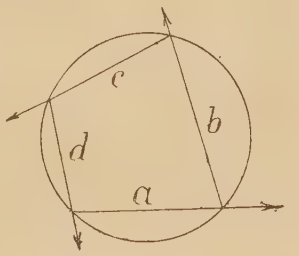


Fig. 16.

Si l'on change les sens de deux côtés consécutifs $b$ et $a$ :

$$\text{az. } b - 2^d + \text{az. } d = \text{az. } a - 2^d + \text{az. } c + 2^d + k.\ 2^d,$$

$$\text{az } b + \text{az. } d = \text{az. } a + \text{az } c + 2^d + k.\ 2^d.$$

Il arrive évidemment que, d'une égalité à la suivante, $k$, qui est un symbole pour *facteur entier*, change de valeur numérique.

Il en est bien ainsi. Soit, en effet (fig. 18), P′ le point de contact de la tangente $t$ sur la circonférence $c$ à laquelle appartient le point exact P. La distance $P_0P'$ est petite du premier ordre ainsi que la distance $P'P$, et il en est encore ainsi de la mesure en radians de l'angle aigu $tP'P$. Le rayon de la circonférence $c$ n'est pas une quantité petite, et la distance du point P à la tangente $t$ est bien une quantité petite du deuxième ordre.

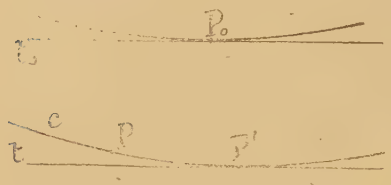


Fig. 18.

6. *Discussion.* — La justification précédente laisse l'impression qu'une foule de procédés divers pourraient être imaginés, qui fourniraient des lieux géométriques distincts dignes au même titre d'être dits de deuxième approximation : il suffit que leurs résultats ne diffèrent que de quantités petites du deuxième ordre. Parmi ces procédés, le meilleur est celui qui constitue l'interprétation géométrique du traitement algébrique du problème ; dès lors, d'ailleurs, l'interprétation géométrique devient inutile.

Considérons un lieu géométrique exact $c$ du point cherché, et limitons nous au cas dans lequel ce lieu appartient à une famille de lignes à un paramètre. La valeur numérique qu'il faut, dans chaque cas particulier, attribuer à ce paramètre est le résultat de l'observation mise en œuvre. Soit $\varphi$ ce paramètre, et que l'équation de la famille de lieux géométriques s'écrive

$$f(x, y, \varphi) = 0 .$$

Appelons $(X_0, Y_0)$ des valeurs connues provisoires des inconnues finales $(X, Y)$. Ces valeurs approchées ne satisfont pas à l'équation du lieu pour la valeur connue du paramètre $\varphi$. Soit $\varphi_0$ la valeur de ce paramètre pour laquelle cette équation serait satisfaite :

$$f(X_0, Y_0, \varphi_0) = 0 ;$$

et

$$f(x, y, \varphi_0) = 0$$

représente la ligne $c_0$ de la famille étudiée qui passe par le point estimé $P_0 (X_0, Y_0)$.

Avec les notations

$$\Delta x = x - X_0 , \qquad \Delta y = y - Y_0 , \qquad \Delta\varphi = \varphi - \varphi_0 ,$$

l'équation

$$\Delta x \frac{\partial f(X_0, Y_0, \varphi_0)}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial f(X_0, Y_0, \varphi_0)}{\partial y} = 0$$

est celle de la tangente $t_0$ en $P_0$ à la courbe $c_0$.

D'autre part, l'équation exacte en $(x, y, \varphi)$ peut s'écrire

$$f(X_0 + \Delta x, Y_0 + \Delta y, \varphi_0 + \Delta\varphi) = 0$$

et se remplacer, à l'approximation convenue, par l'équation

$$\Delta x \frac{\partial f(X_0, Y_0, \varphi_0)}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial f(X_0, Y_0, \varphi_0)}{\partial y} + \Delta\varphi \frac{\partial f(X_0, Y_0, \varphi_0)}{\partial \varphi} = 0$$

linéaire en $(x, y)$ et représentant une droite $t$ parallèle à $t_0$.

C'est à cette droite qu'appartient, en seconde approximation, le point (X, Y) demandé, de sorte que, si

$$\Delta X = X - X_0 , \qquad \Delta Y = Y - Y_0 ,$$

l'équation de deuxième approximation en $(\Delta X, \Delta Y)$ est

$$\Delta X \frac{\partial f(X_0, Y_0, \varphi_0)}{\partial x} + \Delta Y \frac{\partial f(X_0, Y_0, \varphi_0)}{\partial y} + \Delta\varphi \frac{\partial f(X_0, Y_0, \varphi_0)}{\partial \varphi} = 0.$$

7. *Application de la discussion à la méthode de Hatt.* — La meilleure utilisation des observations, dans le passage d'un lieu circulaire de première approximation à un lieu de deuxième approximation, consiste à appliquer les trois équations de la théorie générale esquissée dans la discussion précédente :

1° les inconnues finales (X, Y) satisfont à l'équation du lieu exact $c$,

$$f(X, Y, \varphi) = 0 ;$$

2° les coordonnées $(X_0, Y_0)$ du point approché et la valeur correspondante $\varphi_0$ du paramètre $\varphi$ vérifient l'égalité

$$f(X_0, Y_0, \varphi_0) = 0 ;$$

3° en deuxième approximation, les inconnues finales (X, Y) satisfont à l'équation linéaire

$$(X - X_0) \frac{\partial f(X_0, Y_0, \varphi_0)}{\partial X} + (Y - Y_0) \frac{\partial f(X_0, Y_0, \varphi_0)}{\partial Y} + (\varphi - \varphi_0) \frac{\partial f(X_0, Y_0, \varphi_0)}{\partial \varphi} = 0.$$

A propos des points visés multiples, reprenons les équations en (X, Y, L) qui se déduisent des visées effectuées (par exemple) sur les points $P_1$ et $P_2$ :

$$Y - Y_1 - \operatorname{tg}(L + L_1)(X - X_1) = 0,$$
$$Y - Y_2 - \operatorname{tg}(L + L_2)(X - X_2) = 0.$$

L'élimination de L laisse les équations

$$\left[(X-X_1)(X-X_2) + (Y-Y_1)(Y-Y_2)\right] \operatorname{tg}\varphi$$
$$\mp \left[(X-X_1)(Y-Y_2) - (X-X_2)(Y-Y_1)\right] = 0$$

où

$$\varphi = L_2 - L_1 \qquad \text{ou} \qquad L_1 - L_2.$$

Ces équations représentent les deux circonférences auxquelles appartiennent les segments appuyés sur $P_1P_2$ et capables de l'angle $\varphi$. Il faut prendre le signe supérieur ou le signe inférieur suivant que l'on adopte $\varphi = L_2 - L_1$ ou $\varphi = L_1 - L_2$. Pour fixer les idées, nous adopterons

$$\varphi = L_2 - L_1.$$

Le calcul des dérivées partielles donne

$$\frac{\partial f}{\partial X} = (2X - X_1 - X_2) \operatorname{tg}\varphi - (Y_1 - Y_2),$$
$$\frac{\partial f}{\partial Y} = (2Y - Y_1 - Y_2) \operatorname{tg}\varphi + (X_1 - X_2),$$
$$\frac{\partial f}{\partial \varphi} = \frac{(X - X_1)(X - X_2) + (Y - Y_1)(Y - Y_2)}{\cos^2 \varphi},$$

et l'équation de deuxième approximation en $(X-X_0, Y-Y_0)$ est

$$\left.\begin{aligned} &(X - X_0)\left[(2X_0 - X_1 - X_2)\sin\varphi_0 - (Y_1 - Y_2)\cos\varphi_0\right] \\ &+ (Y - Y_0)\left[(2Y_0 - Y_1 - Y_2)\sin\varphi_0 + (X_1 - X_2)\cos\varphi_0\right] \\ &+ (\varphi - \varphi_0)\,\frac{(X_0 - X_1)(X_0 - X_2) + (Y_0 - Y_1)(Y_0 - Y_2)}{\cos\varphi_0} \end{aligned}\right\} = 0$$

avec $\varphi_0$ tel que

$$\operatorname{tg}\varphi_0 = \frac{(X_0 - X_1)(Y_0 - Y_2) - (X_0 - X_2)(Y_0 - Y_1)}{(X_0 - X_1)(X_0 - X_2) + (Y_0 - Y_1)(Y_0 - Y_2)}.$$

Si $\lambda_1$ et $\lambda_2$ sont les azimuts des droites $P_0P_1$ et $P_0P_2$ respectivement,

$$\operatorname{tg}\lambda_1 = \frac{Y_0 - Y_1}{X_0 - X_1}, \qquad \operatorname{tg}\lambda_2 = \frac{Y_0 - Y_2}{X_0 - X_2}$$

et

$$\varphi_0 = \lambda_2 - \lambda_1.$$

Le lieu de deuxième approximation est une droite parallèle à la tangente $t_0$ menée par le point $P_0$ au cercle de première approximation. En effet, l'équation de ce cercle est

$$\begin{aligned}&\left[(x-X_1)\ (x-X_2)\ +\ (y-Y_1)\ (y-Y_2)\right]\ \operatorname{tg}\varphi_0\\ &-\ \left[(x-X_1)\ (y-Y_2)\ -\ (x-X_2)\ (y-Y_1)\right]=0\end{aligned}$$

et sa tangente en $(X_0, Y_0)$ a pour équation

$$\left.\begin{aligned}&(x-X_0)\left[(2X_0-X_1-X_2)\sin\varphi_0-(Y_1-Y_2)\cos\varphi_0\right]\\ &+\ (y-Y_0)\left[(2Y_0-Y_1-Y_2)\sin\varphi_0+(X_1-X_2)\cos\varphi_0\right]\end{aligned}\right\}=0.$$

Pour préparer le calcul de la distance de cette tangente à la parallèle de deuxième approximation, reprenons les notations

$$P_1P_2=a_0\ ,\qquad P_0P_1=a_1\ ,\qquad P_0P_2=a_2$$

et remarquons que

$$\begin{aligned}X_1-X_0&=a_1\cos\lambda_1\ ,&\qquad X_2-X_0&=a_2\cos\lambda_2\ ,\\ Y_1-Y_0&=a_1\sin\lambda_1\ ,&\qquad Y_2-Y_0&=a_2\sin\lambda_2\ ,\end{aligned}$$

de sorte que

$$\begin{aligned}-\cos\varphi_0\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0&=a_1\sin(\varphi_0+\lambda_1)+a_2\sin(\varphi_0-\lambda_2)\ ,\\ -\cos\varphi_0\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0&=-a_1\cos(\varphi_0+\lambda_1)+a_2\cos(\varphi_0-\lambda_2)\ ,\\ -\cos\varphi_0\left(\frac{\partial f}{\partial\varphi}\right)_0&=-a_1a_2\ \frac{\cos(\lambda_2-\lambda_1)}{\cos\varphi_0}=-a_1a_2,\end{aligned}$$

et l'équation du lieu de deuxième approximation est

$$\left.\begin{aligned}&(x-X_0)\left[a_1\sin(\varphi_0+\lambda_1)+a_2\sin(\varphi_0-\lambda_2)\right]\\ &-(y-Y_0)\left[a_1\cos(\varphi_0+\lambda_1)-a_2\cos(\varphi_0-\lambda_2)\right]\end{aligned}\right\}=a_1a^2(\varphi-\varphi_0).$$

La distance de cette droite de deuxième approximation à la tangente $t_0$ en $P_0$ à la circonférence de première approximation est

$$\frac{(\varphi-\varphi_0)\,a_1a_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2-2a_1a_2\cos\varphi_0}}=(\varphi-\varphi_0)\ \frac{a_1a_2}{a_0}:$$

la droite de deuxième approximation est bien la tangente $t$ menée à la circonférence de lieu exact, parallèlement à la tangente $t_0$ menée en $P_0$ à la circonférence de première approximation : c'est bien la droite de la méthode de Hatt.

Ainsi, toutes les considérations géométriques, sur lesquelles semble reposer la méthode de Hatt, sont inutiles. Les mêmes résultats s'obtiendront, sans risque d'erreur dans le choix des signes, par l'application des principes élémentaires de l'Analyse.

# TABLE DES MATIÈRES

Pages

INTRODUCTION . . . . . 175

CHAPITRE PREMIER : *Théorie nouvelle du théodolite* . . . . . 182

I. Principes et approximation. — II. Erreurs de construction et de réglage. — III. Erreurs d'installation.

CHAPITRE II : *La triangulation topographique* . . . . . 195

1. Équations de la ligne de visée. 2, 3, 4. Problèmes. — 5 Calculs. — 6. Exemple. — 7. Influence de la courbure de la Terre. 8 Influence de la réfraction atmosphérique. 9. Visée horizontale. 10. Visée quelconque, calcul pratique. — 11. Construction de nomogrammes.

CHAPITRE III : *Le problème des trois points*. . . . . 224

1. Problème des trois points — 2. Opérations et solution graphique. — 3 Solution analytique 4 Solution par approximations successives — 5 Rattachement à des axes définis géographiquement.

CHAPITRE IV : *Le problème des deux points* . . . . . 237

1. Problème des deux points. — 2. Opérations et solution graphique. — 3. Solution analytique. — 4. Solution par approximations successives. — 5 Essai de résolution du problème des deux points au moyen d'une seule station. — 6. Solution graphique. — 7. Solution analytique. — 8. Approximations successives. — 9. Correction de courbure de la Terre et de réfraction.

CHAPITRE V : *Méthode du point approché*. . . . . 252

1. Méthode de Hatt ou du point approché. — 2. Énoncé — 3. Problème provisoire. — 4. Problème définitif. — 5. Justification intuitive de la méthode de Hatt. — 6. Discussion. — 7. Application de la discussion à la méthode de Hatt.

N° 26.

# *Vues récentes sur la constitution de l'atmosphère*

*par M. M. Alliaume* (*)

—

En 1921, dans cette Revue des Questions scientifiques, nous avons analysé la troisième édition (encore aujourd'hui la plus récente) du bel ouvrage de J. H. Jeans, *The Dynamical Theory of Gases* (1). Nous terminions l'analyse de ce livre en disant quel service rendrait aux lecteurs de langue française celui qui en assumerait la traduction. Ce service vient de leur être rendu par M. A. Clerc (2). Il suffit de lire les premières pages du volume, dans lesquelles, d'une manière si simple et parfois si pittoresque, sont caractérisés les trois états de la matière, pour se convaincre de ce que la traduction de M. Clerc est très bien faite. Aujourd'hui, nous nous arrêterons de préférence au chapitre intitulé *Aérostatique et atmosphères planétaires*. La constitution, en particulier, de l'atmosphère terrestre est, en effet, de la plus grande importance. L'astronome, pour corriger de la réfraction les résultats de ses observations, a besoin de savoir

(*) Revue des Questions scientifiques, 4e série, t. 9 (1926, 1), p. 154.

(1) J. H. Jeans, *The Dynamical Theory of Gases*, 3e édition. Un vol. in-8° de VII-442 pages. Cambridge, University Press, 1921. — Analyse dans la Revue des Questions scientifiques, 3e série, t. 30 (1921, 2), p. 199.

(2) J. H. Jeans, *Théorie dynamique des Gaz*, traduit sur la troisième édition anglaise par A. Clerc, ingénieur. Un vol. in-8° de 510 pages, de la Collection de monographies scientifiques étrangères, sous la direction de M. G. Juvet. Paris, Blanchard, 1925.

quelle est la ligne suivie dans l'atmosphère par le rayon lumineux émané de l'astre observé et recueilli dans l'instrument visuel, et, par conséquent, de quelle manière l'indice de réfraction varie avec l'altitude. L'explorateur, pour déterminer les cotes des divers points de ses itinéraires, les hauteurs des sommets qu'il atteint, doit se contenter de lectures au baromètre, et ne peut passer de ces lectures aux hauteurs correspondantes que par la connaissance de la loi qui unit à l'altitude la densité de l'atmosphère. Le record de la hauteur en aéroplane est actuellement 12066 mètres, et l'aviateur, qui appuie ses ailes sur les couches atmosphériques, a le plus grand intérêt à connaître les caractéristiques de chacune d'elles.

Une atmosphère est un mélange de gaz soumis à cet ensemble de forces dont la résultante s'appelle la pesanteur. Dalton, déjà, a exprimé la loi relative à une atmosphère en équilibre isothermique : pareille atmosphère peut être regardée comme la réunion d'un certain nombre d'atmosphères, une pour chaque gaz composant, la loi de densité dans chacune de ces atmosphères étant la même que si le gaz correspondant existait seul. La théorie cinétique des gaz retrouve la loi de Dalton, et y ajoute de quelle manière la densité d'un gaz déterminé, en équilibre isothermique dans le champ de la pesanteur, décroît avec l'altitude : c'est une décroissance exponentielle, par laquelle la densité tend vers zéro, et qui s'exprime au moyen de deux constantes propres au gaz considéré (1).

Mais l'hypothèse isothermique est-elle applicable à l'atmosphère terrestre ? Elle ne pourrait l'être que si l'atmosphère était laissée en repos pendant très longtemps. En réalité, l'agitation continuelle de l'atmosphère (au moins dans ses couches inférieures, celles que nous observons) fait sans cesse passer des masses gazeuses de l'une à l'autre de ses couches. D'autre part, la conduction de la chaleur dans les gaz est très lente, et il n'est pas possible d'admettre

(1) Cette loi exponentielle de décroissance s'écrit ici sans tenir compte de la diminution de la pesanteur avec l'altitude. Dans l'étude de l'atmosphère en vue de la correction de réfraction l'astronome doit tenir compte de cette diminution.

cette constante égalisation de température qui définit l'équilibre isothermique. La distribution de l'atmosphère est plutôt déterminée par la « condition qu'un élément du gaz, en se déplaçant, prenne une pression et un volume convenables, dans sa nouvelle position, sans perte ni gain de chaleur par conduction » : c'est l'équilibre adiabatique.

L'observation confirme cette deuxième hypothèse. Dans l'équilibre adiabatique, la diminution de température est proportionnelle à l'altitude, et les composants gazeux se trouvent à peu près dans la même proportion à toutes les hauteurs. Au contraire, dans l'équilibre isothermique d'une atmosphère constituée d'oxygène et d'azote, le rapport de ces deux gaz serait altéré d'environ un pour cent dès l'altitude de 5000 m. Les mesures de Frankland ont porté jusque 4300 m. et n'ont fait apparaître aucune variation de ce rapport.

Cependant l'hypothèse adiabatique ne peut être adoptée qu'au voisinage de la Terre, car son application à l'atmosphère terrestre, au moyen des valeurs numériques connues à la surface, attribue à la température une diminution de 10° par kilomètre, alors que l'observation fournit un nombre beaucoup moindre (à peu près la moitié). Du reste, l'hypothèse adiabatique appliquée à toute l'atmosphère limiterait à 29 kilomètres l'épaisseur de celle-ci, et ce résultat est incompatible avec celui que l'on déduit de l'observation des étoiles filantes (1).

La théorie cinétique des gaz confirme cette impossibilité. Car à la surface de l'atmosphère que prévoit l'hypothèse adiabatique, « la densité serait nulle, et le libre parcours moyen serait infini ; il y aurait des molécules qui arriveraient à cette surface avec des vitesses finies et des probabilités négligeables de choc ; la majorité de ces molécules passerait au delà de la surface libre, d'une manière assez analogue à celle dont les molécules s'échappent de la surface libre d'un liquide pour former de la vapeur ». L'atmosphère doit donc être constituée de deux couches : une atmosphère interne

(1) Sur la constitution de l'atmosphère terrestre d'après l'observation des étoiles filantes, voir *Revue annuelle d'Astronomie* pour 1923, Revue des Questions scientifiques, 4e série, t. 6 (1924, 2), p. 173.

en équilibre adiabatique et une atmosphère externe en équilibre isothermique. Mais cette atmosphère extérieure serait à une température voisine du zéro absolu : sa radiation serait nulle, tandis qu'elle recevrait constamment de la chaleur de la part des couches inférieures. Cet obstacle à l'équilibre thermique de l'atmosphère externe fait descendre sa couche de base, surface de séparation des deux atmosphères, à l'altitude pour laquelle, en équilibre adiabatique, la pression est réduite au quart de ce qu'elle est à la surface de la Terre (1) : c'est une altitude de 10.500 m. à laquelle la température est —54°. Dès 1899, la couche isothermique de l'atmosphère a été observée par Teisserenc de Bort, et, aujourd'hui, elle se retrouve dans le dépouillement des observations de tout ballon-sonde ayant atteint une altitude suffisante. La hauteur moyenne de sa surface de base est comprise entre 10.000 et 11.000 m.

L'atmosphère externe, en équilibre isothermique, serait illimitée, avec une densité tendant vers zéro, autour d'une planète qui n'aurait qu'un mouvement de translation rectiligne et uniforme par rapport aux axes de repère de la Mécanique (2). Dans la réalité, l'atmosphère externe devient négligeable, sur une surface de révolution autour de l'axe terrestre et en chacun des points de laquelle il y a (si l'on veut bien excuser cette imprécision qu'écarterait le traitement mathématique du problème) une sorte d'équilibre entre l'attraction de la Terre et la force centrifuge. Le plan de l'équateur coupe cette surface suivant une circonférence dont le rayon vaut de six à sept fois le rayon terrestre équatorial.

On sait que dans l'atmosphère interne (adiabatique) les divers constituants gazeux se présentent dans les mêmes rapports de la surface du sol au voisinage de la couche

(1) La traduction de M. Clerc dit, par erreur, la moitié au lieu du quart (p. 392).

(2) Ces axes de repère de la Mécanique ont une indétermination telle qu'il serait absolument équivalent de dire : « autour d'une planète immobile (dépourvue de rotation) par rapport aux axes de repère de la Mécanique ».

isothermique. Voici, en rapports de volumes, la constitution de l'atmosphère observée à la surface du sol (1) :

| | | |
|---|---|---|
| Azote | 78.030.000 vol. pour | 100.000.000 (2). |
| Oxygène | 20.990.000 | id. |
| Argon | 940.000 | id. |
| Hydrogène | 10.000 | id. |
| Néon | 1.250 | id. |
| Hélium | 400 | id. |
| Krypton | 50 | id. |
| Xénon | 6 | id. |

C'est à partir de cette composition que les formules propres à l'équilibre isothermique donnent la composition de l'atmosphère externe dans les diverses couches de celle-ci. Le nombre de molécules d'un gaz déterminé par centimètre cube décroît d'autant plus rapidement que le poids moléculaire de ce gaz est plus considérable. A l'altitude de 810 kilomètres, l'atmosphère, devenue extrêmement rare, n'est plus constituée que d'hydrogène, avec des traces d'hélium. La table de Jeans donne le nombre de molécules des constituants de l'atmosphère par centimètre cube aux hauteurs $z = 0$, 20, 160 et 800 kilomètres, mesurées à partir de la base de l'atmosphère isothermique, c'est-à-dire aux altitudes de 10 à 11, de 30 à 31, de 170 et de 810 kilomètres au-dessus du sol. Les nombres de molécules des différents gaz par centimètre cube sont entre eux comme les résultats d'un dosage volumétrique. Aussi les nombres $z = 0$ sont-ils

(1) La table donnée par Jeans et Clerc est construite pour une atmosphère exprimée par un nombre total de parties variant d'un gaz à l'autre. Pour les gaz rares, ce nombre total a été calculé de façon que chacun de ces gaz y entre par *une* partie :

| | | |
|---|---|---|
| Hydrogène | 1 vol. pour | 10.000 |
| Néon | 1 vol. pour | 80.000 |
| Hélium | 1 vol. pour | 250.000 |
| Krypton | 1 vol. pour | 2.000.000 |
| Xénon | 1 vol. pour | 17.000.000 |

(2) Il n'y a pas lieu de s'étonner de ce que la somme des nombres de la première colonne ne reconstitue pas le nombre uniforme 100.000.000 de la deuxième : c'est que les analyses dont ce tableau renferme les résultats n'ont pas été faites pour tous les gaz avec la même approximation.

proportionnels aux nombres du tableau précédent. Si l'on veut passer de ces nombres relatifs aux nombres absolus des diverses molécules par centimètre cube, il faut faire une hypothèse sur le nombre total de molécules par centimètre cube à la base de l'atmosphère isothermique. Jeans a admis le nombre total de $10^{19}$. Dans cette hypothèse, le coefficient de proportionnalité des nombres du tableau précédent aux nombres actuellement demandés est $10^{11}$. Par exemple, à la base de l'atmosphère isothermique, un centimètre cube renferme, parmi ses $10^{19}$ molécules, $78.030.000 \times 10^{11}$ molécules d'azote, et il n'est pas nécessaire de reproduire la première colonne du tableau de Jeans. Quant aux autres colonnes, nous les remplacerons par des colonnes où se lise le pourcentage des molécules de chacun des gaz atmosphériques, qui se retrouvent dans les diverses couches, vis-à-vis de leurs nombres dans la couche $z = 0$. Les gaz cités sont rangés dans l'ordre des poids moléculaires $m$ croissants (1). Le calcul des pourcentages n'a été poussé que jusqu'à la quatrième décimale (2), et même se peut-il que l'approximation des données rende illusoires certaines des décimales conservées.

| | m | $z = 20$ | $z = 80$ | $z = 160$ | $z = 800$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Hydrogène | 2 | 80,0000% | 43,0000% | 18,2000% | 0,0300% |
| Hélium | 4 | 65,0000 | 18,2500 | 3,2500 | 0,0000 |
| Néon | 20 | 11,2000 | 0,0240 | 0,0025 | 0,0000 |
| Azote | 28 | 5,4979 | 0,0007 | 0,0000 | 0,0000 |
| Oxygène | 32 | 3,3492 | 0,0001 | 0,0000 | 0,0000 |
| Argon | 40 | 1,4789 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 |
| Krypton | 83 | 0,5000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 |
| Xénon | 130 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 |
| Total | | 5,0000 % | 0,0050 % | 0,0020% | 0,0000% |

Dans ces conclusions, Jeans est d'accord, à une bonne approximation, avec la plupart des auteurs (3). En résumé,

(1) La table reproduite dans la traduction française de l'ouvrage de Jeans fait une confusion dangereuse entre le point décimal et la virgule employée par les Anglais, là où nous plaçons un point, pour séparer les unités des différentes classes.

(2) Dans la couche $z = 800$, le pourcentage des molécules d'hélium tombe à 0,0000025. Dans la table ci-dessous, on écrira 0,0000.

(3) Le chapitre analysé ci-dessus de l'ouvrage de Jeans se termine par des considérations intéressantes sur la dissipation des atmosphères

et dans l'opinion moyenne de ces auteurs, l'atmosphère peut être décrite de la manière suivante, dans laquelle on ne tiendra compte que des gaz dont la présence est de quelque importance : azote, oxygène, hydrogène, argon, hélium.

Du sol à dix ou onze kilomètres de hauteur, dans l'atmosphère adiabatique, 78 % d'azote, 21 % d'oxygène et 1 % d'argon. Ces rapports commencent à varier à la base de l'atmosphère isothermique : l'argon disparaît rapidement, et le pourcentage d'azote augmente aux dépens de celui de l'oxygène. Cette diminution de la teneur en oxygène

planétaires. La théorie cinétique permet de calculer le libre parcours moyen (entre deux chocs consécutifs) d'une molécule de chaque espèce de l'atmosphère terrestre à une altitude donnée. A la hauteur pour laquelle $z = 800$ km, le libre parcours moyen de la molécule d'hydrogène est de 10 mètres. A une altitude quatre fois plus grande, où le centimètre cube renferme encore 300.000 molécules, cette distance atteint 10.000 mètres, et les chocs sont pratiquement négligeables. Il ne suffit plus d'envisager la trajectoire moléculaire comme rectiligne : c'est une ellipse, une parabole ou une hyperbole suivant qu'est moins ou plus grande la vitesse de la molécule en tel point, comme immédiatement après le dernier choc considéré. Il y a ainsi un certain nombre de molécules qui ne retombent jamais dans l'atmosphère et sont perdues pour celle-ci. Ce nombre de molécules pourrait se calculer d'une manière assez satisfaisante pour l'atmosphère d'une planète dont on connaîtrait, outre la grandeur et la masse, la température de son atmosphère isothermique.

En ce qui concerne la Terre, il faudrait $3 \times 10^{17}$ années pour que la dissipation de son atmosphère corresponde à une couche d'un centimètre d'épaisseur prise à la base de l'atmosphère isothermique. $2{,}8 \times 10^{24}$ années seraient nécessaires à la dissipation de toute cette atmosphère : la dissipation de l'atmosphère terrestre est tout à fait inappréciable.

Mais on vient de raisonner comme si la température de la couche isothermique gardait la même valeur adoptée jusqu'ici pendant les durées énormes qui viennent d'être calculées, tandis qu'il suffirait de supposer une température de 277° pour que la première de ces durées se réduise à 10 000 000 d'années. Pour conclure, « il paraît certain qu'à l'heure actuelle, notre atmosphère conserve son hydrogène, et, à fortiori, tous les gaz plus lourds ; mais la perte de l'atmosphère en hydrogène a été considérable aux époques où la température de l'atmosphère externe était plus grande que 277° ».

L'application des mêmes formules aux atmosphères planétaires, moyennant des valeurs vraisemblables attribuées aux températures des couches supérieures de l'atmosphère, donne des résultats généralement conformes à ce que l'on sait par l'observation.

se poursuivra jusque l'altitude de 80 km à laquelle l'oxygène aura disparu. Mais vers 40 km la teneur en hydrogène sera devenue sensible, et, de même, celle de l'hélium vers 50 km. Cette teneur en hélium augmente jusque vers la couche de disparition de l'oxygène, pour tendre ensuite vers zéro. D'autre part, à partir de 40 ou 50 km, la teneur en azote s'annule très rapidement au profit de celle de l'hydrogène, et, dès l'altitude de 110 km, l'atmosphère est constituée d'hydrogène seul, sauf environ 5 % d'hélium.

Cependant, quelques auteurs soutiennent l'absence complète d'hydrogène dans l'atmosphère externe. En 1920, Chapman et Milne (1) défendaient la thèse d'une atmosphère dans laquelle l'hélium aurait la prépondérance dans toutes les couches à partir de 100 km. Plus récemment, un physicien norvégien, L. Végard, a déduit de l'observation spectroscopique de l'aurore boréale une description de l'atmosphère dans laquelle l'azote serait prépondérant, et même unique, à partir de 90 km.

Les observations de Végard ont été signalées dans cette Revue des Questions scientifiques, au cours des *Revues annuelles d'Astronomie* pour 1923 et 1924 (2). Ici, après les avoir rapidement rappelées, on va exposer les conséquences que leur auteur en tire en ce qui concerne la constitution de l'atmosphère (3).

Les raies obtenues dans l'observation spectroscopique de l'aurore boréale se retrouvent toutes parmi les raies du spectre de l'azote étudié au laboratoire, sauf quatre, dont une dans l'ultra-violet, deux dans le bleu, et la quatrième dans la partie verte du spectre. Mais cette dernière, dont la longueur d'onde, égale à 0,5578 μ, l'emporte sur toutes les longueurs d'onde observées dans le spectre de l'azote, est précisément la plus importante du spectre de l'aurore

(1) Bibliographie dans Jeans, p. 396 de la traduction.

(2) 4e série, t. 6 (1924, 2), p. 159, et t. 8 (1925, 2), p. 117.

(3) Bibliographie dans les *Revues annuelles d'Astronomie* citées ci-dessus. En particulier, du point de vue de cet article : L. Végard, *The auroral Spectrum and the upper Strata of the Atmosphere, Preliminary Communication*, Philosophical Magazine, 6e série, t. 46 ; (1923, 2), p. 193 ; *The Constitution of the upper Strata of the Atmosphere*, Ibid., même vol., p. 577.

polaire, au point que son identification constitue pratiquement tout le problème de l'origine de ce phénomène lumineux. L. Végard écarte l'hypothèse d'un gaz inconnu, déjà dénommé géocoronium, et à l'illumination duquel, dans les couches supérieures de l'atmosphère, serait dû le phénomène. Il s'agit, pour lui, du rayonnement, sous le bombardement cathodique émané du Soleil, de l'azote qui, en un état physique dont l'étude spectroscopique n'aurait pas encore été faite, serait au moins prépondérant dans les couches supérieures de l'atmosphère.

Le bord inférieur de l'aurore boréale se trouve à l'altitude d'environ 90 km, et c'est vers 120 km de hauteur que le phénomène se manifeste avec le plus d'intensité. Les teneurs en azote, hydrogène et hélium y varieraient comme l'ont calculé Jeans et la plupart des auteurs si les molécules gazeuses n'étaient soumises qu'à la force de pesanteur. Mais il y a lieu de tenir compte aussi d'une force électrique dont l'origine est la suivante.

Les rayons cathodiques, rayons X et rayons $\gamma$, émanés du Soleil, atteignent les couches supérieures de l'atmosphère, arrachent des électrons aux molécules qu'ils rencontrent, ionisent ces molécules. Les électrons libérés sont animés de vitesses si grandes qu'ils s'échappent de l'atmosphère, pour ne plus y retomber ; celle-ci se charge positivement, et le potentiel des couches supérieures atteint une valeur d'équilibre, eu égard à la charge négative de la Terre. Dans cet équilibre électrique, les couches inférieures de l'atmosphère sont, comme la Terre, chargées négativement, et leur potentiel diminue jusqu'à une couche à l'état neutre, au delà de laquelle s'étagent les couches chargées positivement, et dont le potentiel croît avec l'altitude. En dessous de cette couche, les molécules gazeuses sont soumises à une force électrique qui s'associe à la pesanteur pour les porter vers la Terre, comme si leur poids était augmenté ; au-dessus de cette couche, elles sont soumises à une force électrique qui s'oppose à la pesanteur et tend à les porter vers les confins de l'atmosphère, comme si leur poids était diminué.

Tout grossier qu'il puisse être, le calcul montre que la variation de potentiel fait naître une force électrique suffisante à vaincre la pesanteur et à dissiper toute l'atmosphère

au delà d'une centaine de kilomètres de hauteur. Mais l'aurore boréale se forme au delà de cette hauteur, les météores s'y illuminent, l'atmosphère y existe encore, et il faut, à cette conclusion, trouver un adoucissement.

Ces phénomènes appartiennent à l'atmosphère isothermique, où la température est très basse : Jeans admettait —54°. Cette basse température n'affecte pas l'hydrogène et l'hélium, dont les températures critiques lui sont trop inférieures,et rien n'a pu empêcher les molécules de ces deux gaz de céder à la force électrique prépondérante pour se dissiper définitivement en dehors de l'atmosphère. Au contraire, cette température est assez basse pour que, dans toute l'épaisseur de l'atmosphère isothermique, l'azote ait subi comme un commencement de condensation, et que ses molécules se soient groupées en gouttelettes ou en poussières cristallines. Il suffit qu'une pareille poussière renferme cent millions de molécules pour que la pesanteur, l'emportant nettement sur la force électrique, retienne l'azote dans l'atmosphère. D'où l'hypothèse d'une atmosphère uniquement constituée, à partir d'environ 90 km, d'azote dans l'état physique qui vient d'être décrit.

Depuis l'énoncé de cette hypothèse, L. Végard a constaté, en effet, au laboratoire (encore que ses résultats soient violemment contestés par plusieurs physiciens), que le bombardement cathodique de l'azote solide émet une raie dont la longueur d'onde est celle de la raie verte de l'aurore boréale (1). De plus, cette hypothèse lui permet d'expliquer les changements de coloration fréquents dans l'aurore boréale, et d'indiquer pourquoi, dans sa partie inférieure, ce phénomène présente généralement une coloration qui passe du jaune-vert au rouge.

La couche atmosphérique de poussières cristallines d'azote a, par les rayons cathodiques, une cause qui se trouve dans le Soleil, et son épaisseur doit être maximum dans le voisinage de l'équateur. L'observation des aurores polaires confirme cette prévision : leur bord supérieur est d'autant plus élevé que la distance au pôle est plus grande. Mais la

(1) Sur ces expériences et les discussions qu'elles ont provoquées, voir la *Revue annuelle d'Astronomie* pour 1924, citée plus haut.

couronne atmosphérique d'azote a dû aussi trouver son équilibre eu égard au champ magnétique terrestre, et il semble bien que son plan de symétrie doit être perpendiculaire à la ligne des pôles magnétiques (1). Il se peut, d'après Végard, que l'anneau de Saturne n'ait pas d'autre constitution, et il est facile de trouver, dans cette voie, de bonnes raisons pour lesquelles les autres planètes sont dépourvues d'un pareil anneau.

Il est naturel que l'auteur cherche, en d'autres phénomènes, aussi nombreux que possible, des confirmations de sa thèse. — La lumière zodiacale et le gegenschein ne seraient pas autre chose que l'illumination de l'atmosphère de poussières d'azote par les rayons du Soleil. Le bleu du ciel serait dû à la dispersion de la lumière solaire sur ces particules cristallines. C'est sur ces particules que se réfléchiraient les ondes sonores et hertziennes, d'où les zones de silence décelées par l'observation. Enfin la scintillation des étoiles y trouverait aussi son explication : la densité de la zone de poussières cristallines est très faible, les distances mutuelles de celles-ci sont, moyennement, grandes, et le très mince pinceau des rayons lumineux qui, émanés d'une étoile, pénètrent dans l'œil par la pupille, est sensiblement affecté, d'une manière irrégulière, par les poussières qui le traversent ; au contraire, les rayons émanés d'une planète, et que l'œil reçoit, se trouvent à l'intérieur d'un cône dont la section, à hauteur des couches atmosphériques supérieures, est beaucoup plus considérable : en chaque très petite durée, les poussières qui le traversent sont assez nombreuses pour ne les affaiblir que d'une manière uniforme. On reconnaîtra l'analogie de cette explication de la scintillation des étoiles et de l'interprétation du mouvement brownien.

(1) Dans la discussion relative à la forme de l'atmosphère extérieure, il semble qu'il y aurait lieu de tenir compte de la rotation de la Terre.

---

«Établissements F. Ceuterick », rue Vital Decoster, 60, Louvain.

PUBLICATIONS

# DU LABORATOIRE
# D'ASTRONOMIE ET DE GÉODÉSIE

DE L'UNIVERSITÉ DE LOUVAIN

---

III — 1926

---